

Calcul Simbolic Aplicat

Lucrari de laborator pentru disciplina

Semnale, Circuite si Sisteme

Calcul Simbolic Aplicat

Lucrari de laborator pentru disciplina

Semnale, Circuite si Sisteme

❖ Analiza de semnal

Transformata Fourier

Serie Fourier Complexa si Reală

Partea I: Transformata Fourier & Serie Fourier Complexa

Partea II: Serie Fourier Reală si aproximare prin trunchiere

Partea III: Exemplu (TF, SFC, SFR, aproximare prin trunchiere)

Formule dualitate timp-frecventa

❖ Functie de transfer

Semnificatia functiei de transfer

❖ Diagrame Frecventiale

Trasarea diagramelor Bode si a diagramei polare:

Partea I: Functii de transfer elementare

Partea II: Functii de transfer de ordinul I si II

Partea III: Functii de transfer ale unor circuite reale

❖ Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare

Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare (metoda Laplace)

❖ Legatura dintre pozitia polilor FDT si raspunsul de regim liber al circuitelor liniare

Legatura dintre raspunsul de regim liber al circuitelor liniare si pozitia polilor FDT

❖ Raspunsul de regim permanent al circuitelor liniare

Raspunsul de regim permanent al circuitelor liniare (semnal armonic)

❖ Semnale modulate in amplitudine (MA)

Modulatie in amplitudine. Semnal MA si spectrul semnalului MA

Reprezentarea fazoriala a semnalelor modulate in amplitudine

❖ Semnale modulate in frecventa si faza (MF/MP)

Modulatie in frecventa si faza. Semnal MF si spectrul semnalului MF

Reprezentarea fazoriala a semnalelor modulate in frecventa

❖ Studiul stabilitatii sistemelor cu reactie

Studiul stabilitatii sistemelor cu reactie folosind metoda Nyquist

Partea I: Criteriul Nyquist & Exemplu

Partea II: Exemple (continuare)

Partea III: Exemple (continuare)

Studiul stabilitatii sistemelor cu reactie folosind metoda locului radacinilor

Partea I: Reguli de trasare rapida & Exemplul I

Partea II: Exemple (continuare)

Partea III: Exemple (continuare)

Partea IV: Exemple (continuare)

Partea V: Exemple (continuare)

❖ Descrierea completa a functiilor dezvoltate

Transformata Fourier

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	1
Exemple	1
Semnal armonic.....	1
Semnal cosinus.....	2
Semnal sinus	2
Semnal cosinus intirziat	3
Modulul si faza transformatiei Fourier pentru semnal armonic	4
Puls dreptunghiular unipolar.....	4
Puls dreptunghiular simetric fata de origine	4
Observatii asupra spectrului pulsului dreptunghiular.....	5
Puls dreptunghiular deplasat	6
Reprezentare Re, Im, modul, argument.....	7
Puls dreptunghiular bipolar.....	8
Puls triunghiular.....	10
Probleme. Intrebari.....	11

Breviar teoretic

Scopul lucrarii: Transformata Fourier. Proprietati. Calculul si reprezentarea spectrului unor semnale reale.

Rezumat teoretic:

Transformata Fourier directa este:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{(-I\omega t)} dt$$

Transformata Fourier inversa este (daca integrala exista!):

$$s(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{(I\omega t)} d\omega}{2\pi}$$

Transformata Fourier este o transformata liniara si se bazeaza pe reprezentarea unui semnal in raport cu un continuum de functii de tip exponentiala complexa. Spectrul semnalului este ponderea fiecarei exponentiale complexe din aceasta dezvoltare.

Mod de lucru

```
> restart:  
> libname:="~/SCSlip",libname:  
> F:=table([dir=inttrans[fourier],inv=inttrans[invfourier]]):  
> S:=(omega)->simplify(F[dir](s(t),t,omega)):
```

Exemple

Semnal armonic

Semnal cosinus

Semnalul de tip cosinus si transformata lui Fourier sunt:

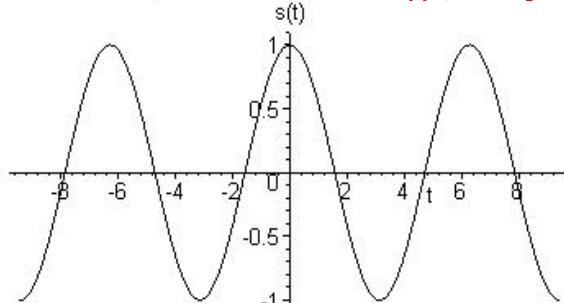
> **s:=(t)->cos(omega0*t):s(t);S(omega);**

$$\cos(\omega_0 t)$$

$$\pi \operatorname{Dirac}(\omega - \omega_0) + \pi \operatorname{Dirac}(\omega + \omega_0)$$

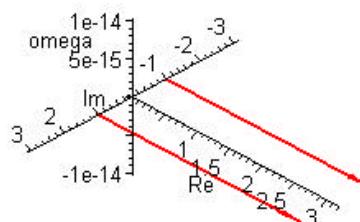
Reprezentarea grafica a semnalului si a spectrului:

> **plot(eval(s(t),omega0=1),t=-3*Pi..3*Pi,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-1.1..1.1]);**



> **PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),omega0=1),omega,interval=eval(-3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("S(omega)");**

S(omega)



Spectrul semnalului este pur real. Modulul are simetrie para iar argumentul este egal cu 0.

Semnal sinus

Semnalul de tip sinus si transformata lui Fourier sunt:

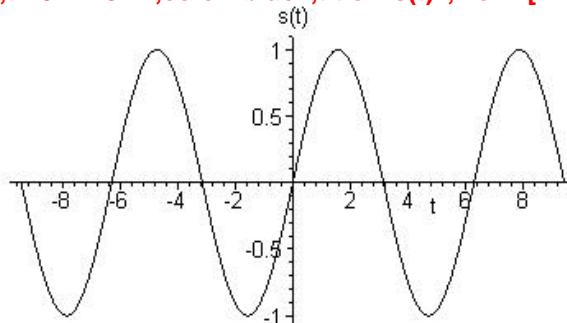
> **s:=(t)->sin(omega0*t):s(t);S(omega);**

$$\sin(\omega_0 t)$$

$$-I \pi \operatorname{Dirac}(\omega - \omega_0) + I \pi \operatorname{Dirac}(\omega + \omega_0)$$

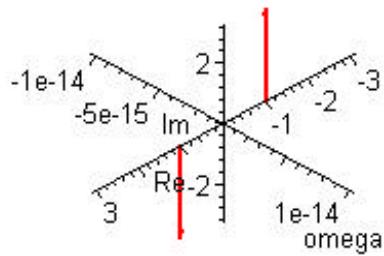
Reprezentarea grafica a semnalului si a spectrului:

> **plot(eval(s(t),omega0=1),t=-3*Pi..3*Pi,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-1.1..1.1]);**



> **PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),omega0=1),omega,interval=eval(-3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("S(omega)");**

S(omega)



Spectrul semnalului este pur imaginari. Modulul are simetrie para iar argumentul are simetrie impara.

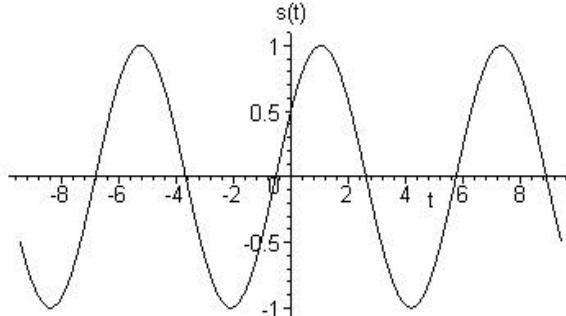
Semnal cosinus intirziat

Pentru un semnal armonic intirziat avem:

```
> s:=(t)->cos(omega0*t+phi):s(t);collect(collect(S(omega),Dirac),Pi);
          cos(omega0 t + phi)
```

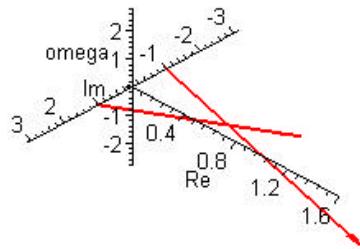
$$\pi (e^{(I\phi)} \text{Dirac}(\omega - \omega_0) + e^{(-I\phi)} \text{Dirac}(\omega + \omega_0))$$

```
> plot(eval(s(t),[omega0=1, phi=-Pi/3]),t=-3*Pi..3*Pi,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-1.1..1.1]);
```



```
> PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),[omega0=1,phi=Pi/3]),omega,interval=eval(-3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("S(omega)"));
```

S(omega)



Spectrul semnalului este complex. Modulul are simetrie para iar argumentul are simetrie impara. In general argumentul este diferit de 0 si diferit de $\frac{\pi}{2}$.

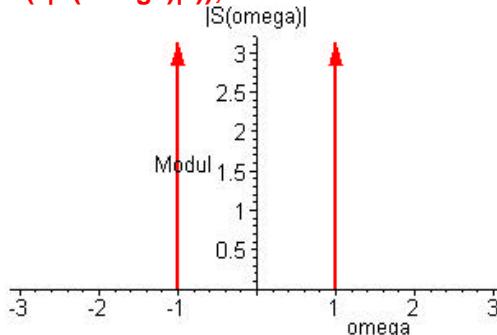
Modulul si faza transformatei Fourier pentru semnal armonic

Se reprezinta pe acelasi grafic informatia de modul si de faza pentru semnal cosinusoidal, sinusoidal si cosinus defazat.

> **s:=(t)->cos(omega0*t+phi);**

```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),[omega0=1,phi=0]),omega,interval=eval(-3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0],AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Modul"),TITLE("|S(omega)|"));


```



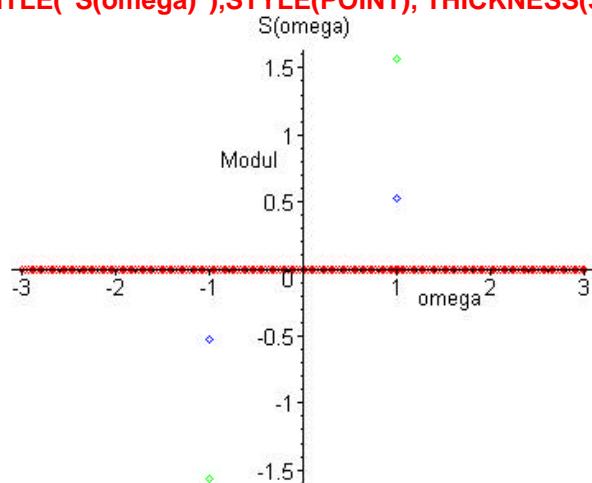
Pentru toate semnalele, modulul este identic si are simetrie para (semnale reale).

> **PLOT(rpa(eval(S(omega)),[omega0=1,phi=0]),omega,interval=eval(-**

```
3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=faza,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(S(omega)),[omega0=1,phi=Pi/2]),omega,interval=eval(-
```

```
3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=faza,culoare=[0,1,0]),rpa(eval(S(omega)),[omega0=1,phi=Pi/6]),omega,interval=eval(-
```

```
3*omega0..3*omega0,omega0=1),tipgrafic=faza,culoare=[0,0,1]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Modul"),TITLE("S(omega)'),STYLE(POINT), THICKNESS(3));
```



Pentru toate semnalele, faza are simetrie impara (semnale reale) si este dependenta de defazaj.

Puls dreptunghiular unipolar

Puls dreptunghiular simetric fata de origine

Semnalul si transformata Fourier a semnalului sunt:

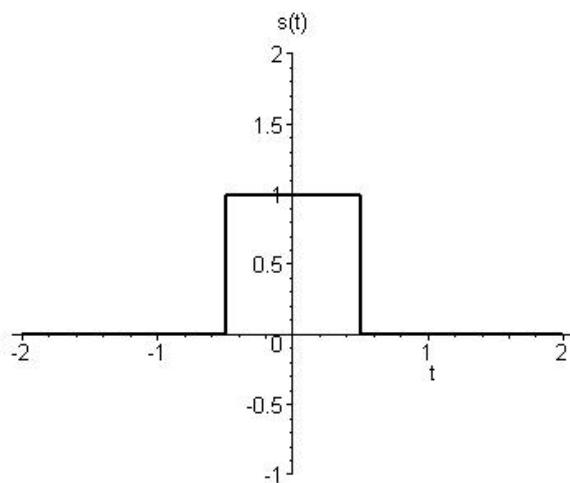
> **s:=(t)->1/tau*(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2)):s(t);S(omega);**

$$\frac{\text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)}{\tau}$$

$$2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tau\omega\right)}{\tau\omega}$$

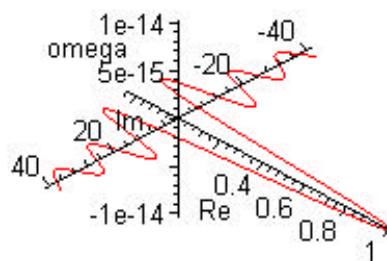
Reprezentarea grafica a semnalului si a spectrului:

```
> plot(eval(s(t),tau=1),t=-2..2,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-1..2], style=LINE, thickness=2);
```



```
> PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("S(omega)");
```

S(omega)

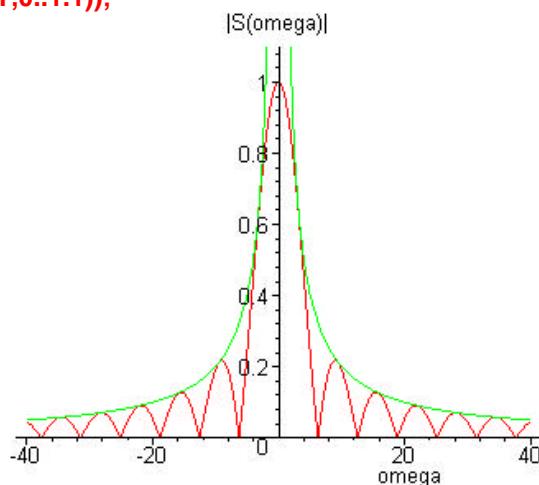


Spectrul este sinus atenuat, pur real.

Observatii asupra spectrului pulsului dreptunghiular

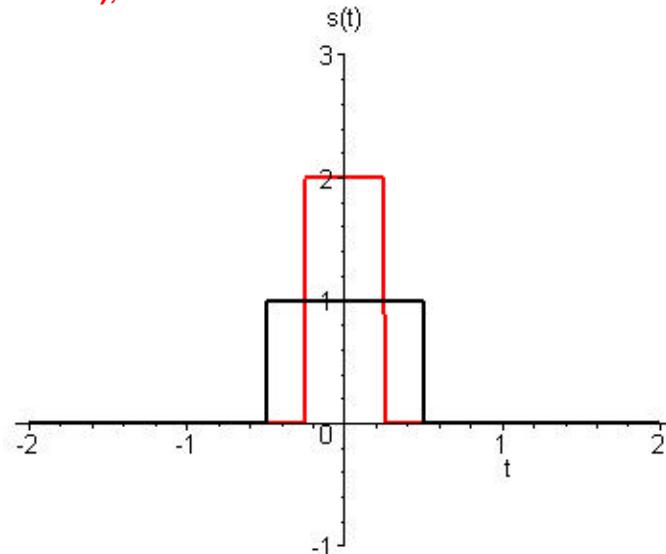
Spectrul pulsului dreptunghiular este infinit iar liniile spectrale scad pentru $\omega \rightarrow \infty$. Viteza de scadere, in cazul semnalului dreptunghiular este proportionala cu $\frac{1}{\omega}$.

```
> PLOT(CURVES(op(op(plot(eval(2/(tau*abs(omega)),tau=1),omega=-40..40))[1]),COLOR(RGB,0,1,0),rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",""),TITLE("|\nS(omega)|"),VIEW(DEFAULT,0..1.1));
```

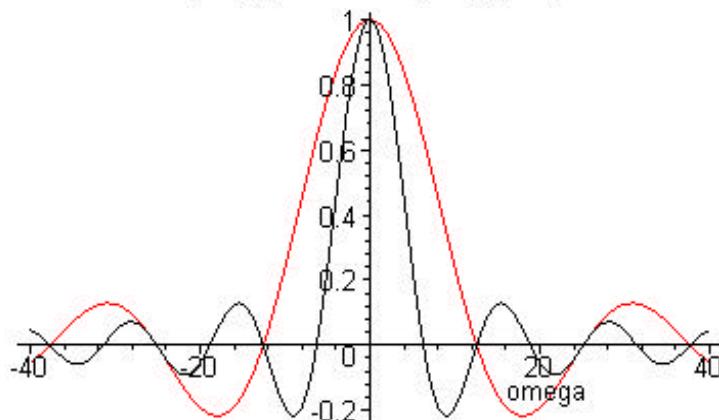


Se compara spectrele pentru doua pulsuri unipolare de latimi diferite dar de aceeasi energie:

```
> plot([eval(s(t),tau=1),eval(s(t),tau=0.5)],t=-2..2,color=[black, red],title="s(t)",view=[DEFAULT,-1..3], style=LINE, thickness=2 );
```



```
> PLOT(rpa(eval(S(omega),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=real culoare=[0,0,0]),rpa(eval(S(omega),tau=0.5),omega,interval=-40..40,tipgrafic=real culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",),TITLE("S1(omega)- rosu si S2(omega)-negru"));
S1(omega)- rosu si S2(omega)-negru
```



Analizam latimea lobului central al spectrului. La scaderea latimii pulsului dreptunghiular lobul central se lateste.

```
> plots[animate](s(t),t=-0.8..0.8,tau=0.02..0.2,title="s(t"),numpoints=1000,frames=50, style=LINE, thickness=1,axes=box);
> plots[animate](S(omega),omega=-100..100,tau=0.02..0.2,numpoints=400,frames=50);
```

Puls dreptunghiular deplasat

Semnalul si transformata Fourier sunt:

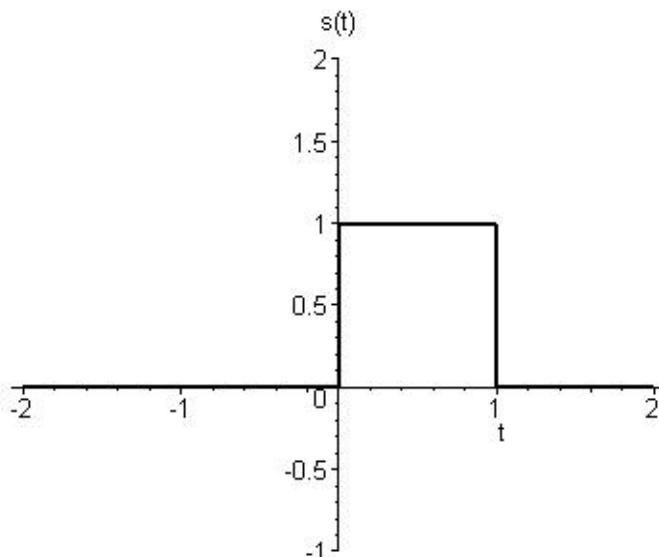
$$s := (t) \rightarrow 1/\tau * (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t-\tau)) : s(t); S(\omega)$$

$$\frac{\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t-\tau)}{\tau}$$

$$\frac{I(-1 + e^{(-I\tau\omega)})}{\tau\omega}$$

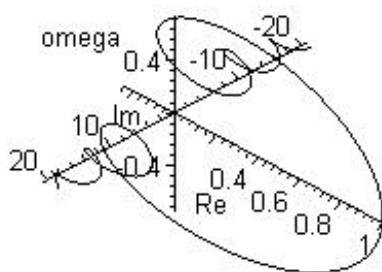
Reprezentarea grafica a pulsului dreptunghiular deplasat:

```
> plot(eval(s(t),tau=1),t=-2..2,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-1..2], style=LINE, thickness=2);
```



```
> PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-20..20,tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-20..20,tipgrafic=D3),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Reprezentarea spatiala a spectrului: S(omega)");
```

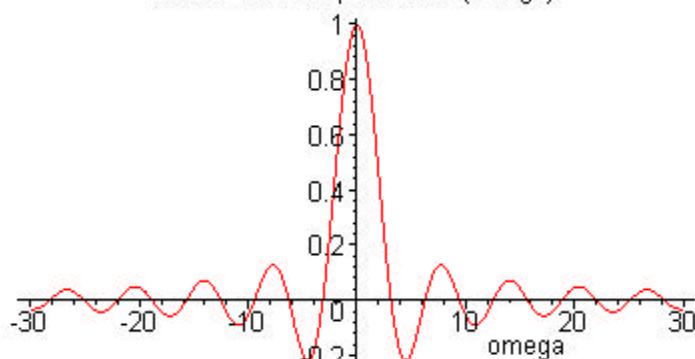
Reprezentarea spatiala a spectrului: $S(\omega)$



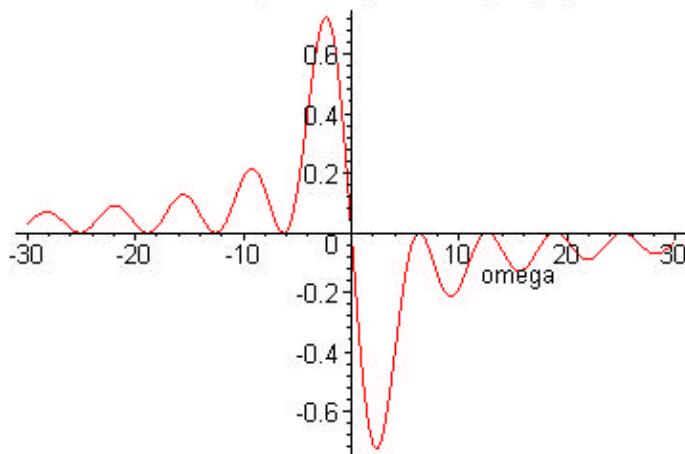
Reprezentare Re , Im , modul, argument

```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-30..30,tipgrafic=real,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",),TITLE("Partea reala a spectrului S(omega));
```

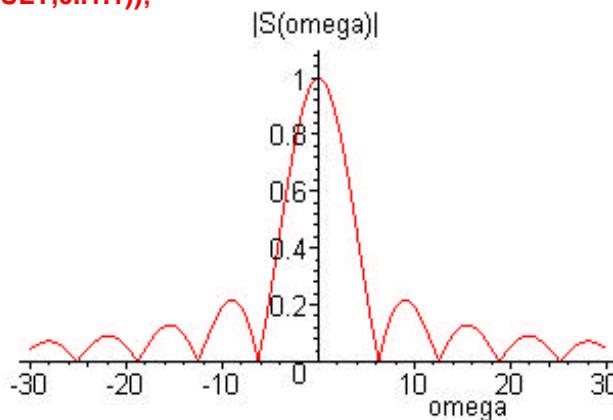
Partea reala a spectrului $S(\omega)$



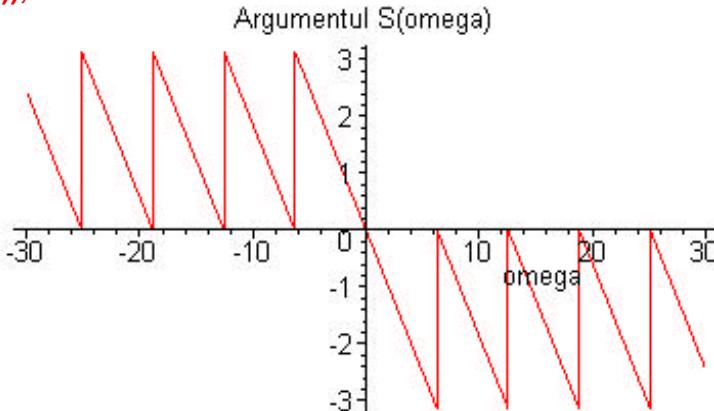
```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-30..30,tipgrafic=imaginari,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",),TITLE("Partea imaginara a spectrului S(omega));
```

Partea imaginara a spectrului $S(\omega)$ 

```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-30..30,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("|\nS(omega)|"),VIEW(DEFAULT,0..1.1));
```



```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-30..30,tipgrafic=faza,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("Ar\ngumentul S(omega)"));
```



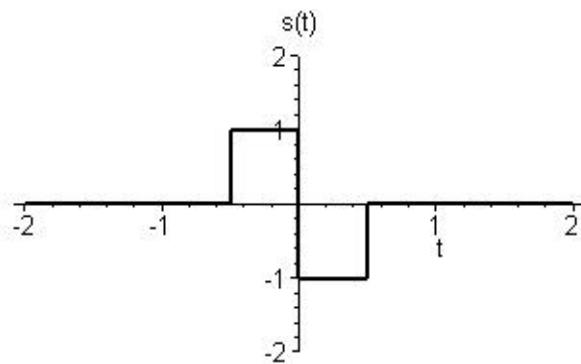
Puls dreptunghiular bipolar

```
> s:=(t)->Heaviside(t+tau/2)-2*Heaviside(t)+Heaviside(t-tau/2):s(t);S(omega);
```

$$\frac{\text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) - 2 \text{Heaviside}(t) + \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)}{-2 I \left(\cos\left(\frac{1}{2}\tau\omega\right) - 1\right)}$$

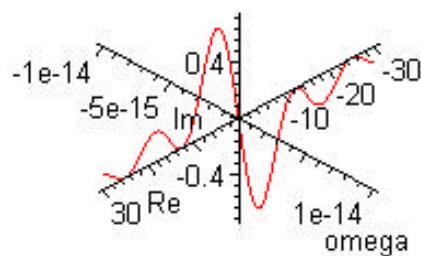
Reprezentarea grafica a pulsului:

```
> plot(eval(s(t),tau=1),t=-2..2,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-2..2], style=LINE,\nthickness=2 );
```



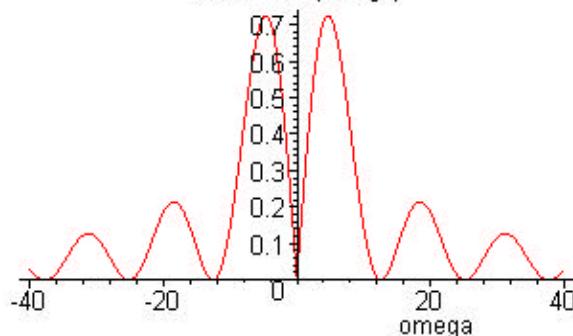
```
> PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-30..30,tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("S(omega)");
```

S(omega)



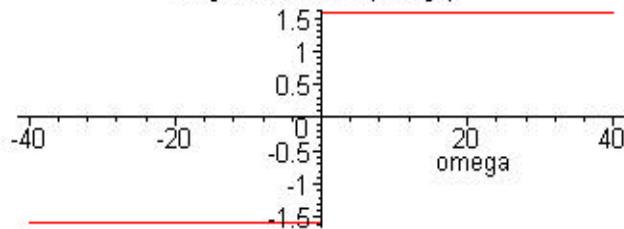
```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",),TITLE("Modul de S(omega)");
```

Modul de S(omega)



```
> PLOT(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=faza,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",),TITLE("Argumentul lui S(omega)");
```

Argumentul lui S(omega)

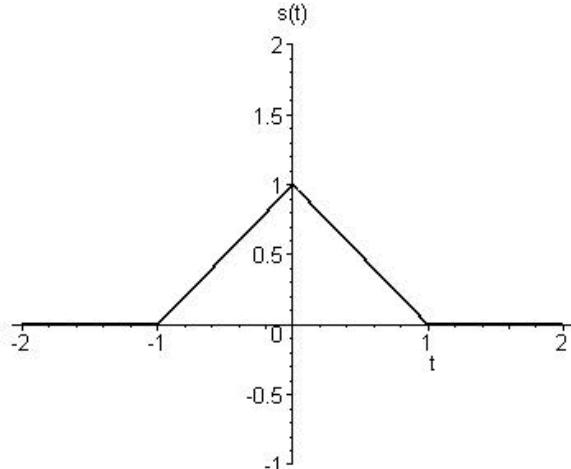


Puls triunghiular

$$\begin{aligned} > s := (t) -> 1/\tau^2 * ((t+\tau)*\text{Heaviside}(t+\tau) - 2*t*\text{Heaviside}(t) + (t-\tau)*\text{Heaviside}(t-\tau)): s(t); S(\omega); \\ & \frac{(t + \tau) \text{Heaviside}(t + \tau) - 2 t \text{Heaviside}(t) + (t - \tau) \text{Heaviside}(t - \tau)}{\tau^2} \\ & - \frac{e^{(I \tau \omega)} - 2 + e^{(-I \tau \omega)}}{\tau^2 \omega^2} \end{aligned}$$

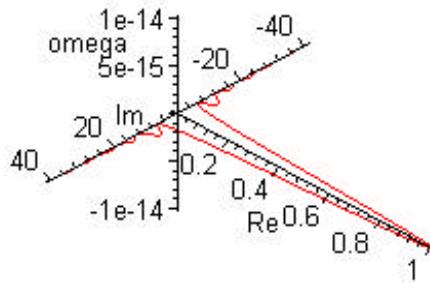
Reprezentarea grafica a pulsului:

```
> plot(eval(s(t),tau=1),t=-2..2,color=black,title="s(t)",view=[DEFAULT,-1..2],style=LINE, thickness=2);
```



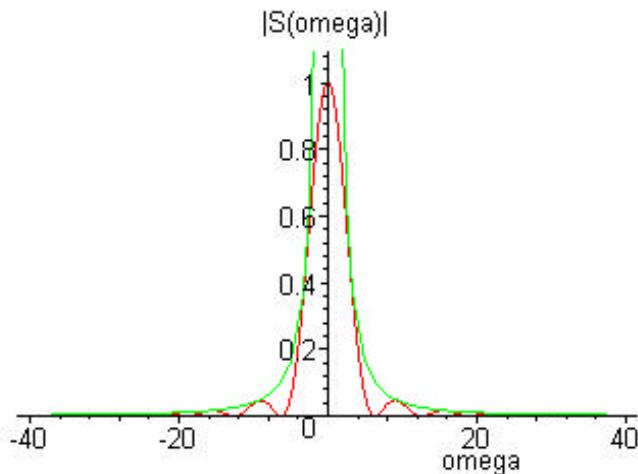
```
> PLOT3D(rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),TITLE("S(omega)'),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("S(omega)");
```

S(omega)



Spectrul este real, sinus atenuat la patrat. Viteza de scadere este proportionala cu $\frac{1}{\omega^2}$.

```
> PLOT(CURVES(op(op(plot(eval(4/(\tau*omega)^2,tau=1),omega=-40..40))[1]),COLOR(RGB,0,1,0)),rpa(eval(S(omega)),tau=1),omega,interval=-40..40,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",""),TITLE("|\nS(omega)|"),VIEW(DEFAULT,0..1.1));
```



Probleme. Intrebari

1. Sa se calculeze spectrul unui semnal triunghiular deplasat.
2. Sa se calculeze spectrul unui semnal format dintr-un puls de forma:
$$\begin{cases} \cos(t) & |t| < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & \frac{1}{2}\pi \leq |t| \end{cases}$$
3. Sa se calculeze spectrul unui semnal obtinut din convolutia a doua, a trei, patru semnale dreptunghiulare.
4. Care este spectrul exponentialei complexe $s(t) = e^{(-I\omega_0 t)}$?
5. Se presupune cunoscut semnalul $p(t)$ si spectrul sau $P(\omega)$. Care este spectrul semnalului $s(t) = p(t) \cos(\omega_0 t)$? Care este spectrul semnalului $s(t) = p(t) e^{(-I\omega_0 t)}$?

Seria Fourier

Partea I: Seria Fourier Complexa

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
Semnal periodic dreptunghiular cu puls generator simetric	2
Modificarea spectrului semnalului periodic la variația lui T	4
Semnal periodic dreptunghiular cu puls generator deplasat	5
Semnal periodic triunghiular cu puls generator simetric	6
Semnal periodic cu puls generator de forma triunghiulara deplasat	7
Probleme. Intrebari	9

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Prezentarea conceptelor de Serie Fourier Complexa (SFC) si Serie Fourier Reală (SFR). Semnificatia fizica a SFR.

Rezumat teoretic:

Reprezentarea vectoriala a unui semnal se bazeaza pe dezvoltarea acestuia intr-o combinatie liniara de functii $\{\phi_k(t), k = 1..N\}$

$$sp(t) = \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(t)$$

unde N este dimensiunea spatiului vectorial (eventual $N=\infty$), iar setul de functii $\phi_k(t)$ formeaza o baza a spatiului vectorial respectiv. Cei N coeficienti c_k constituie o reprezentare discreta a semnalului $sp(t)$ si formeaza ceea ce se numeste spectrul semnalului $sp(t)$ relativ la setul de functii $\phi_k(t)$.

In orice spatiu vectorial se defineste produsul scalar a doi vectori x si y , notat cu $\langle x, y \rangle$ si pe baza acestuia norma unui vector $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Baza spatiului vectorial $\{\phi_k(t)\}$ se numeste ortogonală daca produsul scalar $\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle$ este 0 pentru $k=m$ si diferit de 0 in rest.

Baza $\{\phi_k(t)\}$ se numeste ortonormata daca in plus mai este satisfacuta conditia $|\phi_k(t)|=1$ pentru orice functie $\phi_k(t)$.

SFC

Un exemplu de baza ortonormata pe spatiul vectorial $L2(T)$ cu norma $\langle x, y \rangle = \frac{\int_c^{c+T} x(t) \overline{y(t)} dt}{T}$ il constituie setul de functii periodice de perioada T de tip exponentiala complexa:

$$\phi_k(t) = e^{\left(\frac{ik2\pi t}{T}\right)}$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ este pulsatia semnalului periodic de perioada T . Se poate arata ca setul de functii

formeaza o baza ortonormata, pe spatiul vectorial complex cu produsul scalar definit in $L2(T)$:si cu norma indusa de acesta. Descompunerea semnalului periodic sub forma SFC se poate scrie:

$$sp(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\left(\frac{Ik 2\pi t}{T}\right)}.$$

Semnalul poate fi reprezentat prin setul de coeficienti ai SFC = { $c_k, k = -\infty, -2, -1, 0, 1, 2, \infty$ } .

```
> restart:with(inttrans);
> libname:=".SCSlib",libname;
> addtable(fourier,sg(t),Sg(omega),t,omega);
```

Pornind de la semnalul generator $sg(t)$ se poate scrie semnalul periodic de perioada T:

```
> sp(t):=sum(sg(t-n*T),`n`=-infinity..infinity);
```

$$sp(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Semnalul periodic se poate descompune sub forma seriei Fourier complexe:

```
> spsfc(t):=subs(T=2*Pi/Omega,SFC(sp(t),t));
```

$$spsfc(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega \operatorname{Sg}(n \Omega) e^{(In \Omega t)}}{\pi} \right)$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ iar coeficientii seriei Fourier complexe sunt $c_n = \frac{\operatorname{Sg}(n \Omega)}{T}$.

Pentru acelasi semnal se poate calcula transformata Fourier:

```
> Sp(omega):=subs(T=2*Pi/Omega,FOURIER(sp(t),t,omega0));;
```

$$Sp(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega \operatorname{Sg}(n \Omega) \operatorname{Dirac}(\omega_0 - n \Omega)$$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlib**.

Pentru calcularea transformatiei Fourier a unor semnale:

- functia **FOURIER** [help](#)

Pentru trunchierea unor serii:

- functia **ts** [help](#)

Pentru reprezentarea spectrelor unor semnale:

- functia **rpa** [help](#)

```
> restart;
> libname:=".SCSlib",libname;
> F:=table([dir=FOURIER,inv=inttrans[invfourier]]):
> Sg:=(omega)->F[dir](sg(t),t,omega);
> Sp:=(omega)->F[dir](sp(t),t,omega);
```

Exemple

Semnal periodic dreptunghiular cu puls generator simetric

Pulsul generator:

```
> sg:=(t)->(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2));
```

$$sg := t \rightarrow \operatorname{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2} \tau\right) - \operatorname{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} \tau\right)$$

Semnalul periodic este definit sub forma:

```
> sp:=(t)->sum(sg(t-n*T),`n`=-infinity..infinity);
```

$$sp := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Transformata Fourier a pulsului generator este:

```
> Sg(omega);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \tau \omega\right)}{\omega}$$

Seria Fourier Complexa a semnului periodic este:

> **SFC(sp(t),t);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) e^{\left(\frac{2 I n \pi t}{T}\right)}}{n \pi}$$

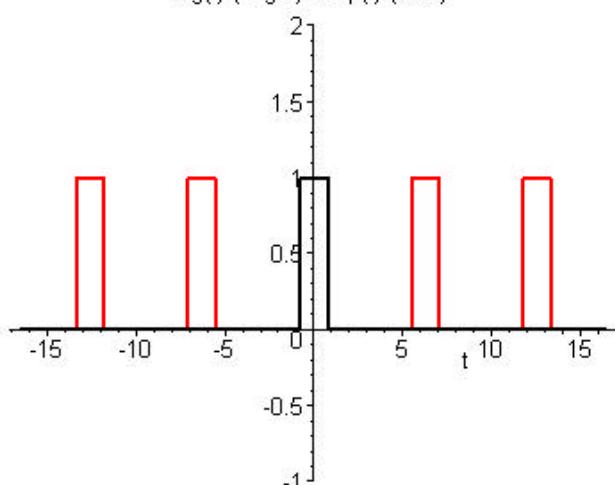
Spectrul semnalului periodic este discret:

> **Sp(omega);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\sin\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right)}{n} \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right) \right)$$

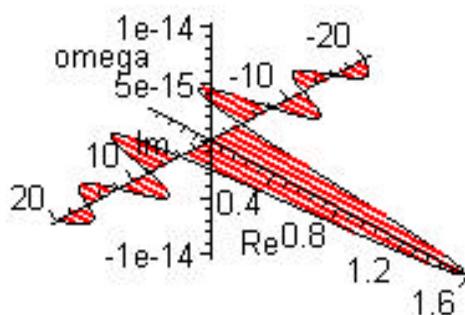
Reprezentarea grafica a pulsului generator si a semnalului periodic dreptunghiular cu factor de umplere 1/4:

> **plot(eval([sg(t),ts(sp(t),n=-20..20)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=5.25*Pi..5.25*Pi,numpoints=1000,color=[black,red],title="sg(t) (negru) si sp(t) (rosu)",view=[DEFAULT,-1..2], style=LINE, thickness = 2);**



> **PLOT3D(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=D3),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Sp(omega) (negru) si Spgomega) (rosu)");**

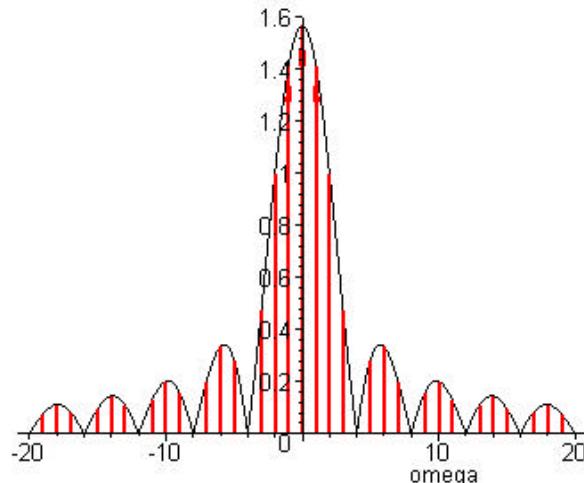
Sp(omega) (negru) si Spgomega) (rosu)



Coefficientii Seriei Fourier Complex sunt reali, pozitivi sau negativi (faza 0 sau π).

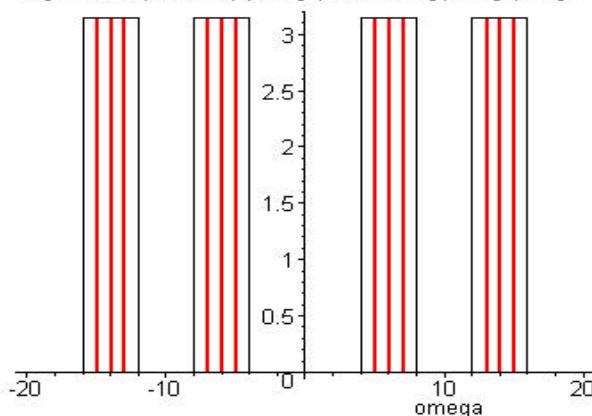
> **PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=modul),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",""),TITLE("|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)");**

$|Sp(\omega)|$ (rosu) si $|Sg(\omega)|$ (negru)



```
> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=faza culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=faza),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("Argumentul pentru Sp(omega)-rosu si Sg(omega)-negru"));
```

Argumentul pentru $Sp(\omega)$ -rosu si $Sg(\omega)$ -negru

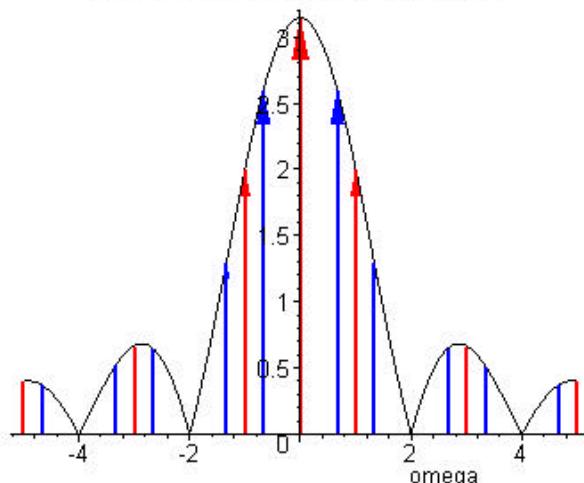


Modificarea spectrului semnalului periodic la variația lui T

Se consideră două semnale periodice care au același puls generator dar perioadele T diferite. Factorul de umplere a celor două semnale este $1/2$ respectiv $1/3$. Spectrul semnalului periodic este discret cu pas de discretizare dependent de perioada T a semnalului infasuratoarea răminind de fiecare dată transformata Fourier a pulsului generator.

```
> PLOT(rpa(ts(eval(T/(2*Pi)*Sp(omega)),[tau=Pi,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-5..5,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),rpa(ts(eval(T/(2*Pi)*Sp(omega)),[tau=Pi,T=3*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-5..5,tipgrafic=modul,culoare=[0,0,1]),rpa(eval(Sg(omega)),tau=Pi),omega,interval=-5..5,tipgrafic=modul),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("||Sp(omega)|| (rosu) si ||Sg(omega)|| (negru)"));
```

$|Sp(\omega)|$ (rosu) si $|Sg(\omega)|$ (negru)



Semnal periodic dreptunghiular cu puls generator deplasat

Pulsul generator:

> **sg:=(t)->(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));**

$$sg := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau)$$

Transformata Fourier a pulsului generator este:

> **Sg(omega);**

$$\frac{-I + I \cos(\tau \omega) + \sin(\tau \omega)}{\omega}$$

Semnalul periodic este definit sub forma:

> **sp:=(t)->sum(sg(t-n*T),`n`=-infinity..infinity);**

$$sp := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Seria Fourier Complexa a semnalului periodic este:

> **SFC(sp(t),t);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{-I + I \cos\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) + \sin\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right)}{n \pi} \right) e^{\left(\frac{2 I n \pi t}{T}\right)} \right)$$

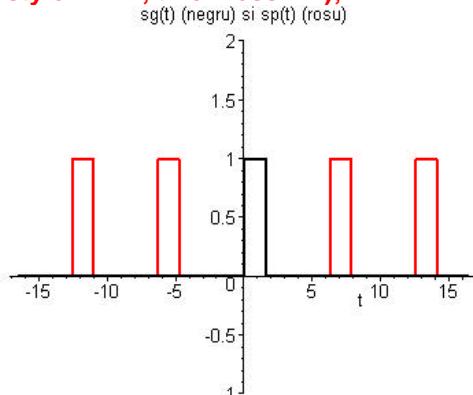
Spectrul acestui semnal este discret:

> **Sp(omega);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-I \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{n} + \frac{I \cos\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{n} + \frac{\sin\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{n} \right)$$

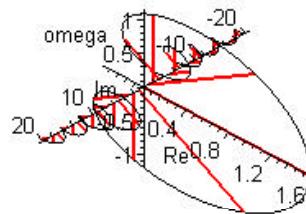
Reprezentarea grafica a pulsului generator si a semnalului periodic:

> **plot(eval([sg(t),ts(sp(t),n=-20..20)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]),t= -5.25*Pi..5.25*Pi,numpoints=1000,color=[black,red],title="sg(t) (negru) si sp(t) (rosu)",view=[DEFAULT,-1..2], style=LINE, thickness = 2);**



> **PLOT3D(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=D3 culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=D3),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Sp(omega) (rosu) si Sg(omega) (negru)");**

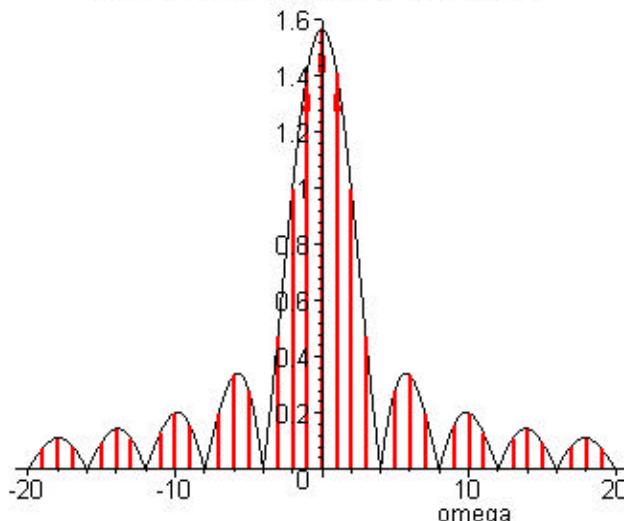
Sp(omega) (rosu) si Sg(omega) (negru)



> **PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]);**

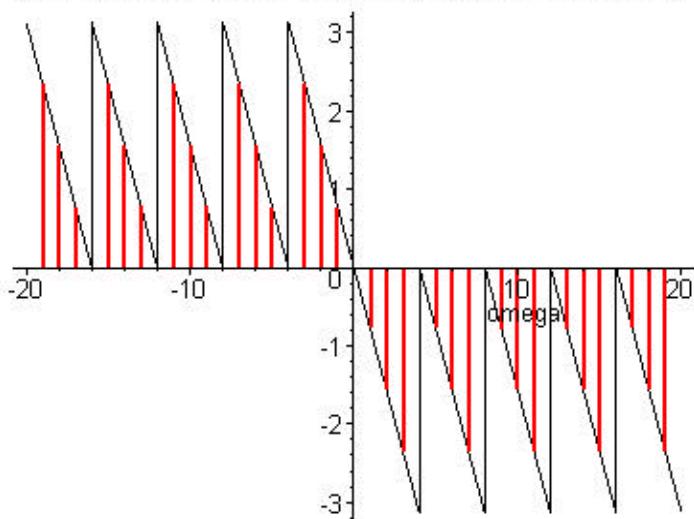
20..20,tipgrafic=modul),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)");

|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)



> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=faza culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Sg(omega),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=faza),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("Argument Sp(omega) (rosu) si Argument Sg(omega) (negru)"));

Argument Sp(omega) (rosu) si Argument Sg(omega) (negru)



Semnal periodic triunghiular cu puls generator simetric

Pulsul generator:

> sg:=(t)->1/tau^2*((t+tau)*Heaviside(t+tau)-2*t*Heaviside(t)+(t-tau)*Heaviside(t-tau));

$$sg := t \rightarrow \frac{(t + \tau) \text{Heaviside}(t + \tau) - 2t \text{Heaviside}(t) + (t - \tau) \text{Heaviside}(t - \tau)}{\tau^2}$$

Transformata Fourier a pulsului generator este:

> convert(Sg(omega),trig);

$$-2 \frac{\cos(\tau \omega) - 1}{\tau^2 \omega^2}$$

Semnalul periodic este definit sub forma:

> sp:=(t)->sum(sg(t-n*T),`n`=-infinity..infinity);

$$sp := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - nT)$$

Seria Fourier a semnlului periodic este:

> SFC(sp(t),t);

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{T \left(\cos\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) - 1 \right) e^{\left(\frac{2 I n \pi t}{T}\right)}}{n^2 \pi^2} \right)$$

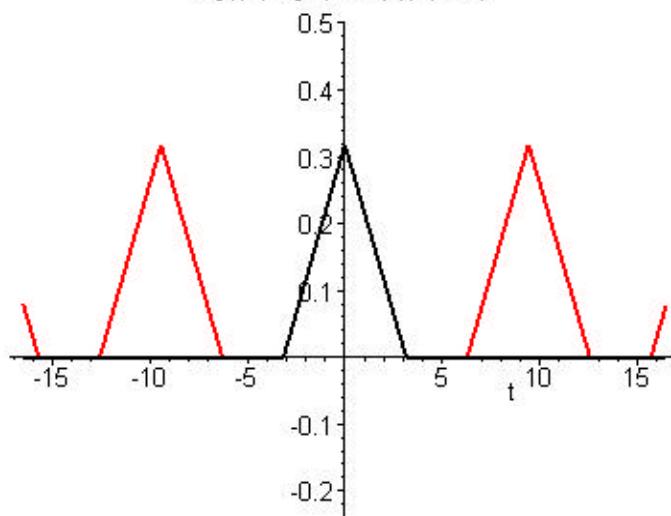
Spectrul acestui semnal este discret:

> **Sp(omega);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{T \cos\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{n^2 \pi} + \frac{T \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{n^2 \pi} \right)$$

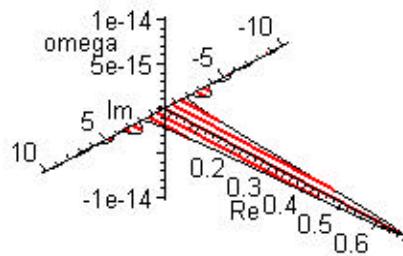
Reprezentarea grafica a pulsului generator si a semnalului periodic:

> **plot(eval([sg(t),ts(sp(t),n=-20..20)], [tau=Pi,T=3*Pi]),t=5.25*Pi..5.25*Pi,numpoints=1000,color=[black,red],title="sg(t) (negru) si sp(t) (rosu)",view=[DEFAULT,-0.25..0.5], style=LINE, thickness = 2);**



> **PLOT3D(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi,T=3*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-10..10,tipgrafic=D3,culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega)),[tau=Pi,T=3*Pi]),omega,interval=-10..10,tipgrafic=D3),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Sp(omega) (rosu) si Sg(omega) (negru)");**

Sp(omega) (rosu) si Sg(omega) (negru)



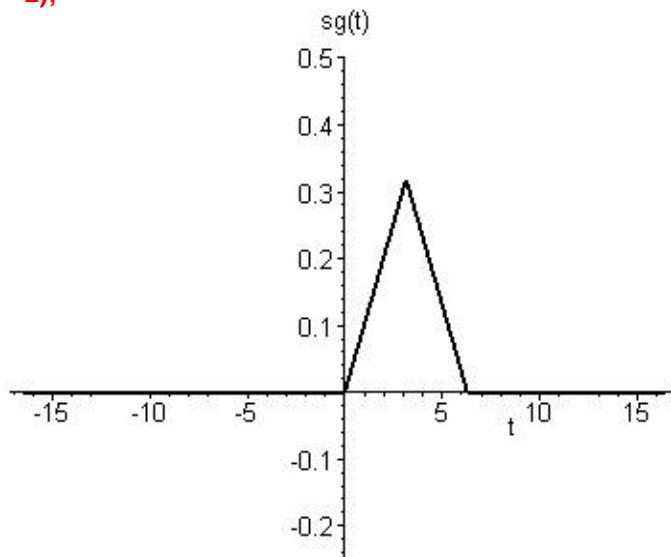
Semnal periodic cu puls generator de forma triunghiulara deplasat

Pulsul generator:

> **sg:=(t)->1/tau^2*(t*Heaviside(t)-2*(t-tau)*Heaviside(t-tau)+(t-2*tau)*Heaviside(t-2*tau));**

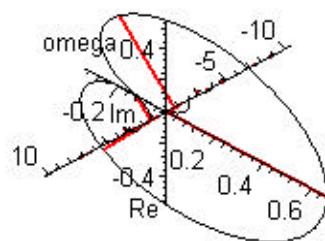
$$sg := t \rightarrow \frac{t \text{Heaviside}(t) - 2(t - \tau) \text{Heaviside}(t - \tau) + (t - 2\tau) \text{Heaviside}(t - 2\tau)}{\tau^2}$$

```
> plot(eval(sg(t),tau=Pi),t=-5.25*Pi..5.25*Pi,numpoints=1000,color=[black,red],title="sg(t)",view=[DEFAULT,-0.25..0.5],style=LINE, thickness = 2);
```



```
> PLOT3D(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi,T=3*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-10..10,tipgrafic=D3 culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega),[tau=Pi,T=3*Pi]),omega,interval=-10..10,tipgrafic=D3),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Sp(omega) (rosu) si Sg(omega) (negru)");
```

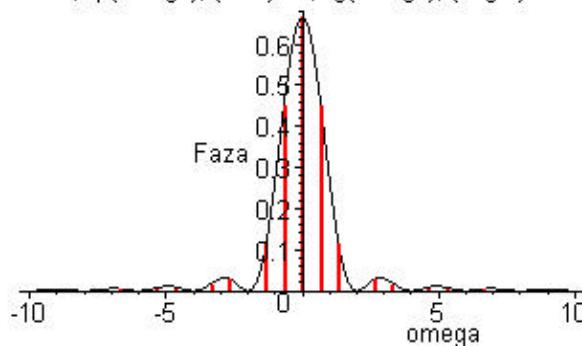
Sp(omega) (rosu) si Sg(omega) (negru)



Atit pentru semnalul periodic deplasat in timp cit si pentru cel nedeplasat, modulul coeficientilor SFC este acelasi.

```
> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi,T=3*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-10..10,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega),[tau=Pi,T=3*Pi]),omega,interval=-10..10,tipgrafic=modul),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Faza"),TITLE("|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)");
```

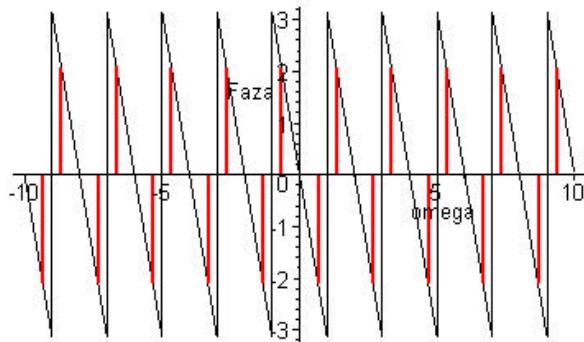
|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)



Faza spectrului este diferita. Pentru semnalul nedeplasat, faza este constanta si egala cu 0. Pentru semnalul deplasat, faza este dependenta de perioada T a semnalului si variabila la variatia lui ω .

```
> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi,T=3*Pi]),n=-20..20),omega,interval=-10..10,tipgrafic=faza,culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega),[tau=Pi,T=3*Pi]),omega,interval=-10..10,tipgrafic=faza),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Faza"),TITLE("Argument Sp(omega) (rosu) si Argument Sg(omega) (negru)"));
```

Argument Sp(omega) (rosu) si Argument Sg(omega) (negru)



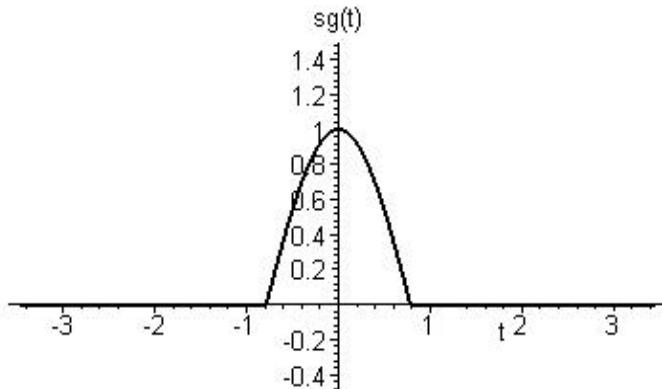
Probleme. Intrebari

1. Sa se calculeze simbolic spectrul semnalului periodic obtinut prin repetarea unui puls generator de

$$\text{forma: } \begin{cases} \cos(t) & |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq |t| \end{cases}$$

```
> sg:=(t)->cos(Pi/tau*t)*(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2));plot(eval(sg(t),tau=Pi/2),t=-1.1*Pi..1.1*Pi,numpoints=1000,color=[black,red],title="sg(t)",view=[DEFAULT,-0.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);
```

$$sg := t \rightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\left(\text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)\right)$$



2. Sa se refaca calculele si pentru puls generator cosinus deplasat respectiv Gauss.

3. Sa se refaca calculele pentru semnal periodic dreptunghiular nesimetric fata de origine.

4. Sa se calculeze pe baza Seriei Fourier Complexe, Seria Fourier Reală pentru semnalele discutate in exemplele anterioare.

5. Ce legatura exista intre coeficientii Seriei Fourier Complexa c_k si c_{-k} ? Cum sunt modul si argumentul lor?

Seria Fourier

Partea a II-a: Seria Fourier Reală

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
SFR a unui semnal periodic dreptunghiular cu puls generator simetric.....	2
SFR a unui semnal periodic dreptunghiular cu puls generator nesimetric.....	4
Probleme. Intrebari.....	6

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Prezentarea conceptelor de Serie Fourier Complexa (SFC) si Serie Fourier Reală (SFR). Semnificatia fizica a SFR.

Rezumat teoretic:

SFR

Un alt exemplu de baza ortonormata pe spatiul vectorial $L_2(T)$ îl constituie setul de functii periodice de perioada T de tip armonic:

$$\{\phi_k(t)\} = \{1, \cos\left(\frac{Ik 2 \pi t}{T}\right), \sin\left(\frac{Ik 2 \pi t}{T}\right)\}, k = 1 .. \infty$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ este pulsatia semnalului periodic de perioada T . Se poate arata ca setul de functii formeaza o baza ortonormata, pe spatiul vectorial complex cu produsul scalar definit in $L_2(T)$:si cu norma indusa de acesta. Descompunerea semnalului periodic sub forma SFC se poate scrie:

$$sp(t) = a_0 + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{Ik 2 \pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{Ik 2 \pi t}{T}\right) \right) \right).$$

Semnalul poate fi reprezentat prin setul de coeficienti ai SFR = { $a_0, a_k, b_k, k = 0, 1, 2 .. \infty$ }

> **restart:with(inttrans):**

> **libname:=".~/SCSlib",libname:**

> **addtable(fourier,sg(t),Sg(omega),t,omega);**

Pornind de la semnalul generator $sg(t)$ se poate scrie semnalul periodic de perioada T :

> **sp(t):=sum(sg(t-n*T),`n`=-infinity..infinity);**

$$sp(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Semnalul periodic se poate descompune sub forma seriei Fourier complexe:

> **spsfc(t):=subs(T=2*Pi/Omega,SFC(sp(t),t));**

$$spsfc(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega Sg(n \Omega)}{\pi} e^{(In \Omega t)} \right)$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ iar coeficientii seriei Fourier complexe sunt $c_n = \frac{Sg(n \Omega)}{T}$.

Semnalul periodic se descompune sub forma seriei Fourier reale:

> **spsfr(t):=subs(T=2*Pi/Omega,SFR(sp(t),t));**

$\text{spsfr}(t) :=$

$$\frac{1}{2} \frac{\Omega \text{Sg}(0)}{\pi} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega (\text{Sg}(n \Omega) + \text{Sg}(-n \Omega)) \cos(n \Omega t)}{\pi} + \frac{\frac{1}{2} I \Omega (\text{Sg}(n \Omega) - \text{Sg}(-n \Omega)) \sin(n \Omega t)}{\pi} \right) \right)$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ iar coeficientii seriei Fourier complexe sunt $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = I(c_n - c_{-n})$.

Pentru acelasi semnal Transformata Fourier este:

> **Sp(omega)=subs(T=2*Pi/Omega,FOURIER(sp(t),t,omega0));;**

$$\text{Sp}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega \text{Sg}(n \Omega) \text{Dirac}(\omega - n \Omega)$$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru calcularea transformatiei Fourier a unor semnale:

- functia **FOURIER** [help](#)

Pentru trunchierea unor serii:

- functia **ts** [help](#)

Pentru reprezentarea spectrelor unor semnale:

- functia **rpa** [help](#)

```
> restart;
> libname:="..../SCSlab",libname;
> F:=table([dir=FOURIER,inv=inttrans[invfourier]]):
> Sg:=(omega)->F[dir](sg(t),t,omega);
> Sp:=(omega)->F[dir](sp(t),t,omega);
```

Exemple

SFR a unui semnal periodic dreptunghiular cu puls generator simetric

Pulsul generator:

> **sg:=(t)->(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2));**

$$sg := t \rightarrow \text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2} \tau\right) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} \tau\right)$$

Semnalul periodic este definit sub forma:

> **sp:=(t)->sum(sg(t-n*T), n=-infinity..infinity);**

$$sp := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Seria Fourier complexa a semnlului periodic este:

> **SFC(sp(t),t);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) e^{\left(\frac{2 I n \pi t}{T}\right)}}{n \pi}$$

Seria Fourier reala a semnlului periodic este:

> **SFR(sp(t),t);**

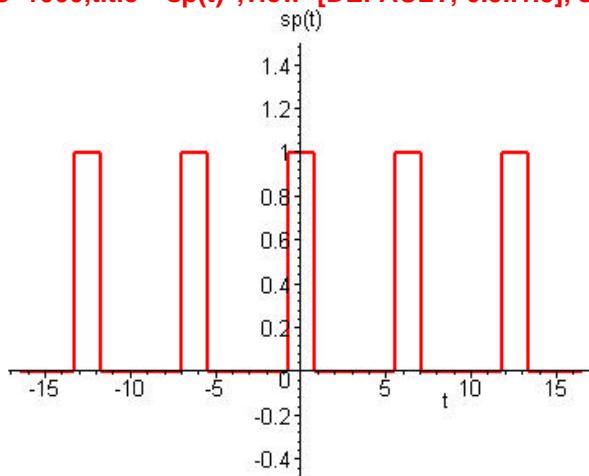
$$\frac{\tau}{T} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \frac{\sin\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) \cos\left(2 \frac{n \pi t}{T}\right)}{n \pi} \right) \right)$$

Obs: 1. Semnalul are componenta continua;

2. Semnalul este real si cu simetrie para. In SFR toti coeficientii pentru functiile sinus sunt 0.

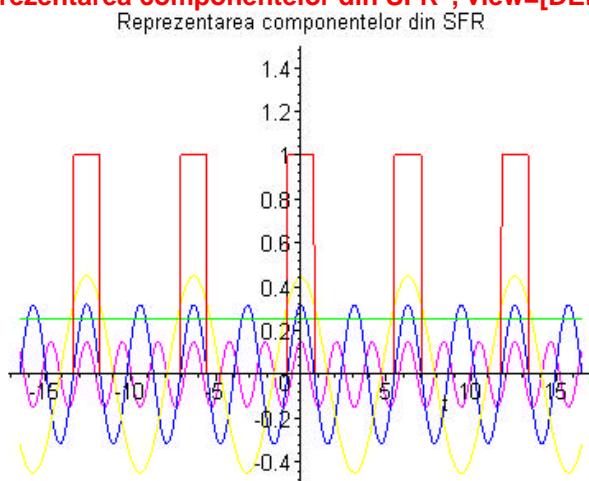
Reprezentarea grafica a semnlului periodic dreptunghiular cu factor de umplere **1/4**:

```
> plot(eval(ts(sp(t),n=-20..20),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=-
5.25*Pi..5.25*Pi,numpoints=1000,title="sp(t)",view=[DEFAULT,-0.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);
```



Semnalul periodic și componentele seriei Fourier reale (componenta continuă, fundamentală și câteva armonici):

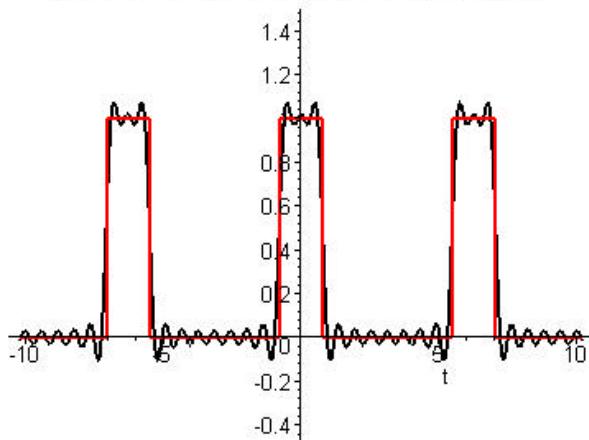
```
> plot(eval([ts(sp(t),n=-20..20), seq(SFR(sp(t),t,armonica=i),i=0..4)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=-
5.25*Pi..5.25*Pi,title="Reprezentarea componentelor din SFR", view=[DEFAULT,-0.5..1.5]);
```



Semnalul periodic și aproximarea acestuia prin seria Fourier reală trunchiată la un număr finit de termeni:

```
> plot(eval([ts(sp(t),n=-20..20), ts(SFR(sp(t),t,n=0..10)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=-3.25*Pi..3.25*Pi,color =
[red, black],title="Aproximarea cu număr finit de componente din SFR",numpoints=1000,
view=[DEFAULT,-0.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);
```

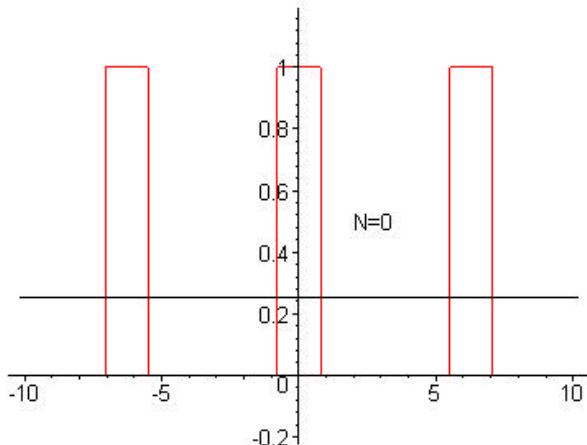
Aproximarea cu număr finit de componente din SFR



Aproximarea semnalului cu seria Fourier reală prin trunchiere se face cu eroare în funcție de numărul de componente pastrate:

```
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq( op(plot( eval([ts(SFR(sp(t),t),n=0..i), ts(sp(t),n=-
20..20)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=-3.25*Pi..3.25*Pi,
numpoints=200,color=[black,red]))[1..2],TEXT([2.75,0.5],cat("N=",i))),i=0..20)),TITLE("Efectul
aproximării cu număr finit de componente"));
```

Efectul aproximării cu număr finit de componente



SFR a unui semnal periodic dreptunghiular cu puls generator nesimetric

Pulsul generator:

> **sg:=(t)->(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));**

$$sg := t \rightarrow \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau)$$

Semnalul periodic este definit sub forma:

> **sp:=(t)->sum(sg(t-n*T),`n`=-infinity..infinity);**

$$sp := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - nT)$$

Seria Fourier complexă a semnului periodic este:

> **SFC(sp(t),t);**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(-I + I \cos\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) + \sin\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) \right) e^{\left(\frac{2In\pi t}{T}\right)} \right)$$

Seria Fourier reală a semnului periodic este:

> **SFR(sp(t),t);**

$$\frac{\tau}{T} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right) \cos\left(2 \frac{n \pi t}{T}\right)}{n \pi} - \frac{\left(-1 + \cos\left(2 \frac{\tau n \pi}{T}\right)\right) \sin\left(2 \frac{n \pi t}{T}\right)}{n \pi} \right) \right)$$

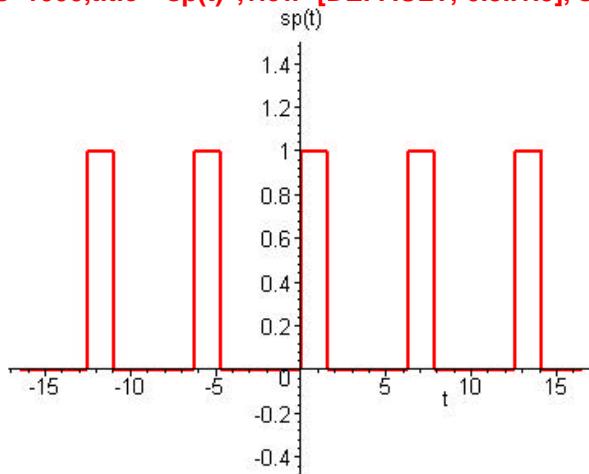
Obs: 1. Semnalul are componenta continuă;

2. In SFR coeficienții pentru funcțiile sinus și cosinus sunt în generali diferiti de 0.

Reprezentarea grafică a semnalului periodic dreptunghiular cu factor de umplere **1/4**:

> **plot(eval(ts(sp(t),n=-20..20),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=**

5.25*Pi..5.25*Pi,numpoints=1000,title="sp(t)",view=[DEFAULT,-0.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);

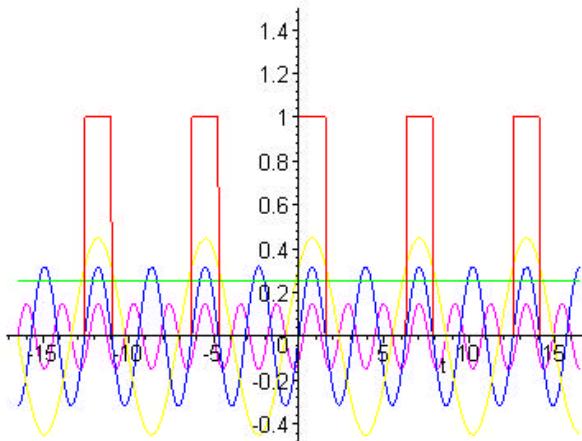


Semnalul periodic și componentele seriei Fourier reale (componenta continuă, fundamentală și cîteva armonici):

> **plot(eval([ts(sp(t),n=-20..20), seq(SFR(sp(t),t,armonica=i),i=0..4)]),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),t=**

5.25*Pi..5.25*Pi,title="Reprezentarea componentelor din SFR", view=[DEFAULT,-0.5..1.5];

Reprezentarea componentelor din SFR

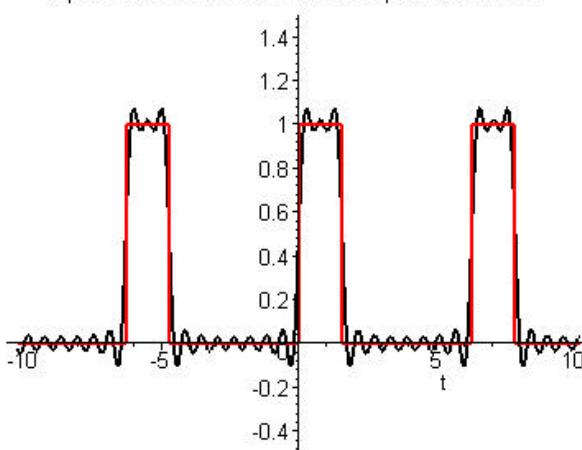


Armonicele au respectiv aceeasi amplitudine si sunt deplasate cu acelasi interval de timp. Defazajul pentru fiecare armonica este diferit.

Semnalul periodic si aproximarea semnalului prin seria Fourier reala trunchiata la un numar finit de termeni:

> **plot(eval([ts(sp(t),n=-20..20), ts(SFR(sp(t),t),n=0..10)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]), t=-3.25*Pi..3.25*Pi,color = [red, black],title="Aproximarea cu numar finit de componente din SFR",numpoints=1000,view=[DEFAULT,-0.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);**

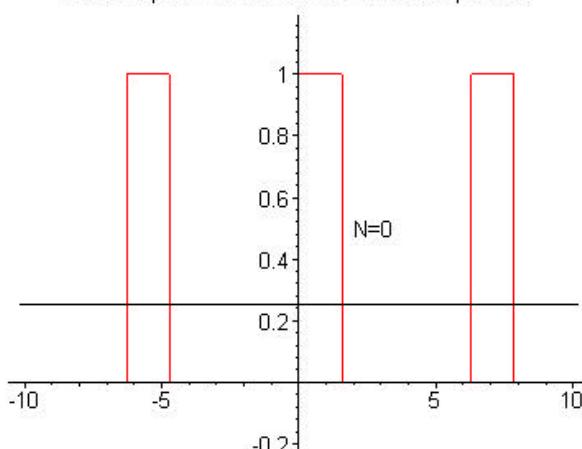
Aproximarea cu numar finit de componente din SFR



Aproximarea semnalului cu seria Fourier reala prin trunchiere se face cu eroare in functie de numarul de componente pastrate:

> **INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot(eval([ts(SFR(sp(t),t),n=0..i), ts(sp(t),n=-20..20)], [tau=Pi/2,T=2*Pi]), t=-3.25*Pi..3.25*Pi, numpoints=200,color=[black,red]))[1..2], TEXT([2.75,0.5],cat("N=",i))), i=0..20)),TITLE("Efectul aproximarii cu numar finit de componente"));**

Efectul aproximarii cu numar finit de componente



Probleme. Intrebări

1. Cit este valoarea componentei continue pentru semnalul periodic dreptunghiular?
2. În cazul semnalului periodic dreptunghiular obținut din puls dreptunghiular deplasat, determinați faza fundamentală și a armonicilor.
3. Refațeți calculele pentru semnal periodic triunghiular și studiați erorile de aproximare cu un număr finit de armonici.

Seria Fourier

Partea a III-a: Exemple

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	1
Exemplu	2
Probleme. Intrebari.....	5

Breviar teoretic

```
> restart:with(inttrans);
> libname:="..../SCSlip",libname;
> addtable(fourier,sg(t),Sg(omega),t,omega);
Pornind de la semnalul generator sg(t) se obtine semnalul periodic de perioada T:
> sp(t):=sum(sg(t-n*T),n=-infinity..infinity);
```

$$sp(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Semnalul periodic se poate descompune sub forma seriei Fourier complexe:

```
> spsfc(t):=subs(T=2*Pi/Omega,SFC(sp(t),t));
```

$$spsfc(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega \operatorname{Sg}(n \Omega)}{\pi} e^{(In \Omega t)} \right)$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ iar coeficientii seriei Fourier complexe sunt $c_n = \frac{\operatorname{Sg}(n \Omega)}{T}$.

Semnalul periodic se descompune sub forma seriei Fourier reale:

```
> spsfr(t):=subs(T=2*Pi/Omega,SFR(sp(t),t));
spsfr(t) :=
```

$$\frac{1}{2} \frac{\Omega \operatorname{Sg}(0)}{\pi} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega (\operatorname{Sg}(n \Omega) + \operatorname{Sg}(-n \Omega))}{\pi} \cos(n \Omega t) + \frac{\frac{1}{2} I \Omega (\operatorname{Sg}(n \Omega) - \operatorname{Sg}(-n \Omega))}{\pi} \sin(n \Omega t) \right) \right)$$

unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ iar coeficientii seriei Fourier complexe sunt $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = I(c_n - c_{-n})$.

Pentru acelasi semnal transformata Fourier este:

```
> Sp(omega):=subs(T=2*Pi/Omega,FOURIER(sp(t),t,omega0));
```

$$Sp(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega \operatorname{Sg}(n \Omega) \operatorname{Dirac}(\omega0 - n \Omega)$$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlip**.

Pentru calcularea transformatiei Fourier a unor semnale:

- functia **FOURIER** [help](#)

Pentru trunchierea unor serii:

- functia **ts** [help](#)

Pentru reprezentarea spectrelor unor semnale:

- functia **rpa**

[help](#)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlib",libname;
> F:=table([dir=FOURIER,inv=inttrans[invfourier]]):
> Sg:=(omega)->F[dir](sg(t),t,omega):
> Sp:=(omega)->F[dir](sp(t),t,omega):
```

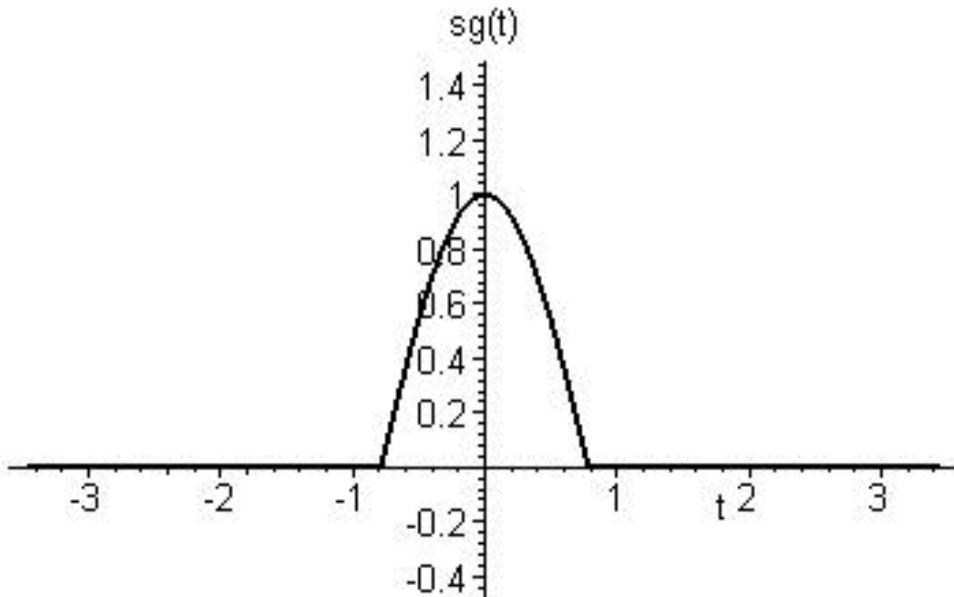
Exemplu

Pentru semnalul periodic obtinut prin repetarea pulsului generator de forma:

$$\begin{cases} \cos(t) & |t| < \frac{1}{2}\pi \\ 0 & \frac{1}{2}\pi \leq |t| \end{cases}$$

```
> sg:=(t)->cos(Pi/tau*t)*(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2));plot(eval(sg(t),tau=Pi/2),t=-1.1*Pi..1.1*Pi,numpoints=1000,color=[black,red],title="sg(t)",view=[DEFAULT,-0.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);
```

$$sg := t \rightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\left(\text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)\right)$$



Spectrul pulsului generator este:

```
> Sg(omega);

$$\left( -I \pi^2 \text{Dirac}\left(\frac{-\tau \omega + \pi}{\tau}\right) + I \text{Dirac}\left(\frac{-\tau \omega + \pi}{\tau}\right) \tau^2 \omega^2 - I \text{Dirac}\left(\frac{\tau \omega + \pi}{\tau}\right) \tau^2 \omega^2 + I \pi^2 \text{Dirac}\left(\frac{\tau \omega + \pi}{\tau}\right) + 2 \tau \right) \pi \cos\left(\frac{1}{2} \tau \omega\right) \right) ((-\tau \omega + \pi)(\tau \omega + \pi))$$

```

Semnalul periodic este definit sub forma:

```
> sp:=(t)->sum(sg(t-n*T), n=-infinity..infinity);
```

$$sp := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} sg(t - n T)$$

Seria Fourier complexa a semnalului periodic este:

```
> SFC(sp(t),t);
```

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-2 \frac{\pi \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) \tau e^{\left(\frac{2 I n \pi t}{T}\right)}}{T \left(2 \frac{\tau n \pi}{T} - \pi \right) \left(2 \frac{\tau n \pi}{T} + \pi \right)} \right)$$

Seria Fourier reala a semnalului periodic este:

```
> SFR(sp(t),t);
```

$$2 \frac{\tau}{T\pi} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(-4 \frac{\pi \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) \tau \cos\left(2 \frac{n \pi t}{T}\right)}{T \left(2 \frac{\tau n \pi}{T} - \pi\right) \left(2 \frac{\tau n \pi}{T} + \pi\right)} \right) \right)$$

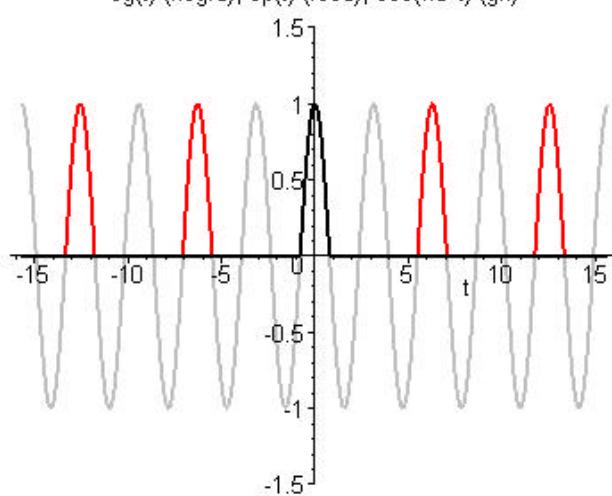
Spectrul acestui semnal este discret:

> **Sp(omega);**

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 I \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) T \operatorname{Dirac}\left(\frac{2 \tau n + T}{T \tau}\right) \pi \operatorname{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{(-2 \tau n + T) (2 \tau n + T)} \right. \\ & + \frac{-8 I \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) \operatorname{Dirac}\left(\frac{2 \tau n + T}{T \tau}\right) \tau^2 n^2 \pi \operatorname{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{T (-2 \tau n + T) (2 \tau n + T)} \\ & + \frac{8 I \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) \operatorname{Dirac}\left(\frac{-2 \tau n + T}{T \tau}\right) \tau^2 n^2 \pi \operatorname{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{T (-2 \tau n + T) (2 \tau n + T)} \\ & \left. + \frac{-2 I \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) T \operatorname{Dirac}\left(\frac{-2 \tau n + T}{T \tau}\right) \pi \operatorname{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{(-2 \tau n + T) (2 \tau n + T)} + \frac{4 \cos\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) T \tau \operatorname{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{(-2 \tau n + T) (2 \tau n + T)} \right) \end{aligned}$$

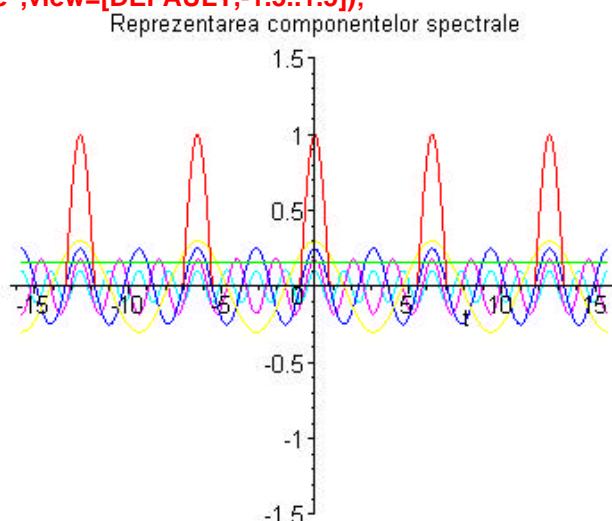
Reprezentarea formelor de undă ale pulsului generator și semnalului periodic corespunzător:

> **plot(eval([sg(t),ts(sp(t),n=-5..5),cos(2*t)], [t=Pi/2,T=2*Pi]),t=-5*Pi..5*Pi,numpoints=1000,color=[black,red,gray],title="sg(t) (negru), sp(t) (rosu), cos(w0*t) (gri)",view=[DEFAULT,-1.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);**



Reprezentarea armonicelor din compozitia spectrală a semnalului periodic:

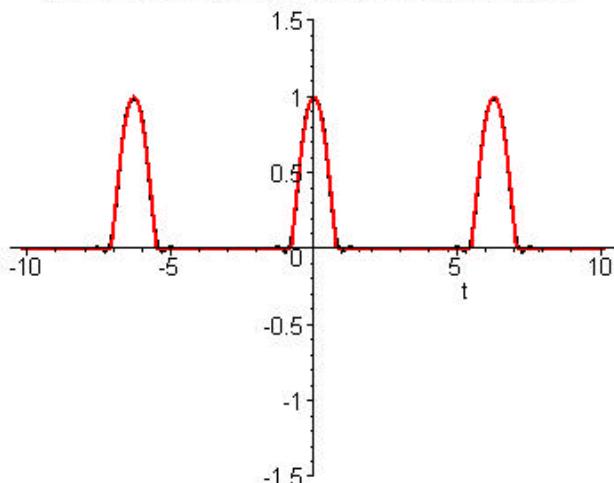
> **plot([ts(eval(sp(t)),[t=Pi/2,T=2*Pi]),n=20..20),seq(SFR(eval(sp(t)),[t=Pi/2,T=2*Pi]),t,armonica=i,i=0..4)],t=-5*Pi..5*Pi,title="Reprezentarea componentelor spectrale",view=[DEFAULT,-1.5..1.5]);**



Seria Fourier - Exemplu

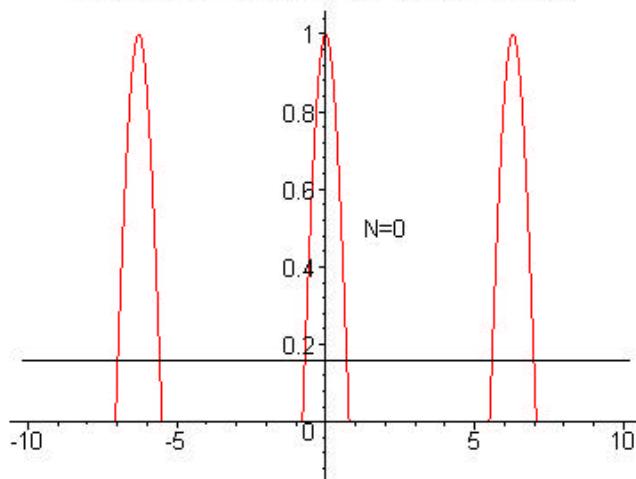
```
> plot([ts(eval(sp(t)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20), ts(SFR(eval(sp(t)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),t),n=0..10],t=3.25*Pi..3.25*Pi,color = [red, black],title="Aproximarea cu numar finit de componente din SFR",numpoints=1000, view=[DEFAULT,-1.5..1.5], style=LINE, thickness = 2);
```

Aproximarea cu numar finit de componente din SFR



```
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq( [op(plot( [ ts(SFR(eval(sp(t)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),t),n=0..i),
ts(eval(sp(t)),[tau=Pi/2,T=2*Pi]),n=-20..20)],t=-3.25*Pi..3.25*Pi,
numpoints=200,color=[black,red))][1..2],TEXT([2,0.5],cat("N=",i))),i=0..10)),TITLE("Efectul aproximarii cu numar finit de componente"));
```

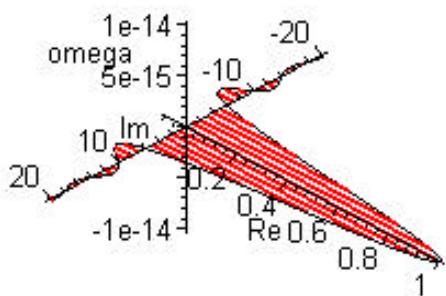
Efectul aproximarii cu numar finit de componente



Reprezentarea spectrelor pulsului generator si semnalului periodic:

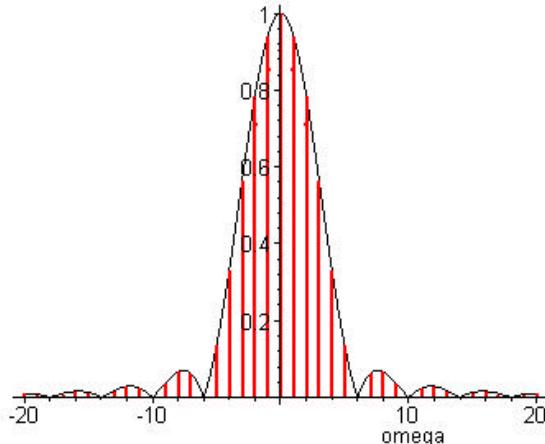
```
> PLOT3D(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi,w0=2]),n=-20..20),omega,interval=20..20,tipgrafic=D3,coloare=[1,0,0]),rpa(eval(Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi,w0=2]),omega,interval=20..20,tipgrafic=D3),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Sg(omega) (rosu) si Sp(omega) (negru)");
```

Sg(omega) (rosu) si Sp(omega) (negru)



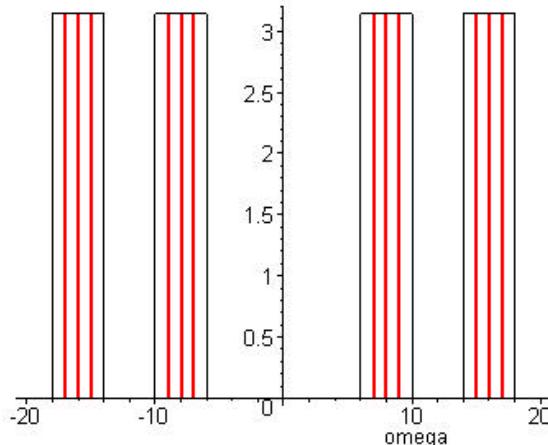
```
> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi,w0=2]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi,w0=2]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=modul),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",TITLE("|Sg(omega)| (rosu) si |Sp(omega)| (negru)"));
```

|Sg(omega)| (rosu) si |Sp(omega)| (negru)



```
> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi,w0=2]),n=-20..20),omega,interval=-20..20,tipgrafic=faza,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Sg(omega)),[tau=Pi/2,T=2*Pi,w0=2]),omega,interval=-20..20,tipgrafic=faza),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","",TITLE("argument(Sg(omega)) (rosu) si argument(Sp(omega)) (negru)"));
```

argument(Sg(omega)) (rosu) si argument(Sp(omega)) (negru)



Probleme. Intrebări

1. Refaceti calculele pentru un puls generator deplasat.
2. Cum este spectrul pulsului generator? Comparati cu spectrul pulsului dreptunghiular si a pulsului triunghiular. Cum este spectrul semnalului periodic?
3. Comparati aproximarea cu numar finit de componente din SFR pentru puls generator dreptunghiular si pentru puls generator de tip cosinus. In ce caz aproximarea este mai buna? Explicati concluzia!
4. Refaceti calculele pentru puls generator de tip Gauss.

Formule de dualitate timp-frecventa

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	2
Semnale Periodice	2
Semnale esantionate	3
Semnale periodice si esantionate	4

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Studiul spectrului unui semnal periodic, a spectrului unui semnal esantionat si a unui semnal periodic si esantionat.

Rezumat teoretic:

Semnalul periodic se defineste prin repetarea unui puls generator la intervale de timp T:

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_g(t - nT).$$

Pentru semnalul periodic astfel definit se deduce o formula a spectrului semnalului periodic in functie de spectrul pulsului generator.

Semnalul discret se obtine prin esantinarea unul semnal continuu:

$$s_{ex}(t) = s(t) \delta_{T_{ex}}(t)$$

Se deduce o formula care exprima spectrul semnalului discret in functie de spectrul semnalului continuu.

> **restart:with(inttrans):**

> **libname:="~/SCSlib",libname:**

> **F:=table([dir=FOURIER,inv=inttrans[invfourier]]):**

Pentru esantionare lucrăm cu semnalul periodic:

> **delta[T]:=(t,T)->sum(Dirac(t-n*T),n=-infinity..infinity);**

$$\delta_T := (t, T) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Dirac}(t - nT)$$

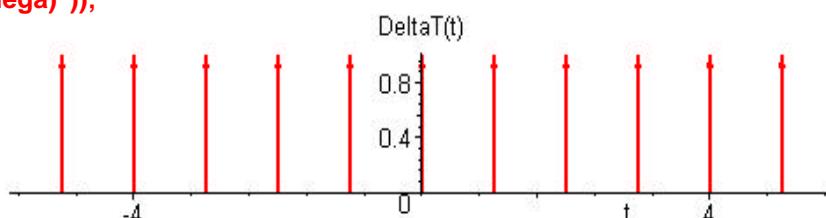
Spectrul semnalului este:

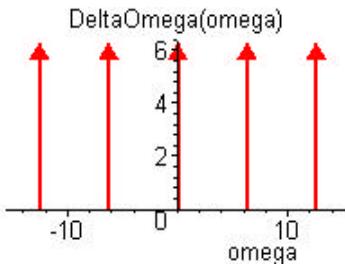
> **delta[Omega]:=subs(T=2*Pi/Omega,F[dir](delta[T](t,T),t,omega));**

$$\delta_\Omega := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega \text{Dirac}(\omega - n\Omega)$$

Reprezentarea grafica:

> **T1:=1: PLOT(rpa(eval(ts(delta[T](t,T),n=-10..10),T=T1),t,interval=5.5..5.5,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("t",""),TITLE("Delta T(t)"));PLOT(rpa(eval(ts(delta[Omega],n=-10..10),Omega=2*Pi/T1),omega,interval=-15..15,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("DeltaOmega(omega)"));**





Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru calcularea transformatiei Fourier a unor semnale:

- functia **FOURIER** [help](#)

Pentru trunchierea unor serii:

- functia **ts** [help](#)

Pentru reprezentarea spectrelor unor semnale:

- functia **rpa** [help](#)

```
> restart:with(inttrans):
> libname:=".//SCSlab",libname:
> F:=table([dir=FOURIER,inv=inttrans[invfourier]]):
> delta[T]:=(t,T)->sum(Dirac(t-n*T),n`=-infinity..infinity):delta[Omega]:=subs(T=2*Pi/Omega,F[dir](delta[T](t,T),t,omega)):
```

Spectrele semnalului generator, semnalului periodic, semnalului esantionat sunt definite astfel:

```
> Sg:=(omega)->F[dir](sg(t),t,omega):
> Sp:=(omega)->F[dir](sp(t),t,omega):
> Ses:=(omega)->F[dir](ses(t),t,omega):
> Spes:=(omega)->F[dir](spes(t),t,omega):
```

Semnale Periodice

Definim pe baza pulsului generator, semnalul periodic de perioada T:

```
> sp:=(t)->sum(sg(t-n*T),n`=-infinity..infinity);
```

$$sp := t \rightarrow \sum_{n = -\infty}^{\infty} sg(t - nT)$$

Pentru forma particulara a semnalului gerenerator de tip puls dreptunghiular:

```
> sg:=(t)->1/tau*(Heaviside(t+tau/2)-Heaviside(t-tau/2));
```

$$sg := t \rightarrow \frac{\text{Heaviside}\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)}{\tau}$$

Spectrul semnalului generator si al semnalului periodic:

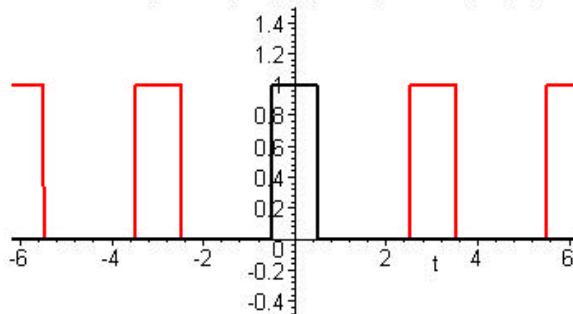
```
> Sg(omega);Sp(omega);
```

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tau\omega\right)}{\tau\omega} \\ & \sum_{n = -\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\sin\left(\frac{\tau n \pi}{T}\right) \text{Dirac}\left(\omega - \frac{2 n \pi}{T}\right)}{n} \right) \end{aligned}$$

Semnal periodic dreptunghiular cu factor de umplere 1/3:

```
> plot(eval([sg(t),ts(sp(t),n=-10..10)], [tau=1,T=3]),t=-10..10, view=[-6.2..6.2,-0.5..1.5],title="Semnalul periodic (rosu) si pulsul generator (negru)", color=[black,red],style=LINE, thickness=2 );
```

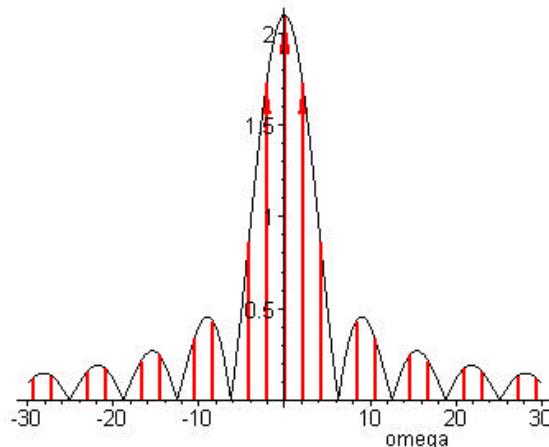
Semnalul periodic (rosu) si pulsul generator (negru)



Spectrul semnalului periodic si spectrul semnalului generator:

```
> PLOT(rpa(ts(eval(Sp(omega)),[tau=1,T=3]),n=-20..20),omega,interval=-
30..30,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]),rpa(eval((2*Pi)/T*Sg(omega),[tau=1,T=3]),omega,interval=-
30..30,tipgrafic=modul),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)"));
```

|Sp(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)



Concluzie: Spectrul unui semnal periodic este discret. Spectrul semnalului periodic este o versiune discretizata a spectrului semnalului generator cu o rata de esantionare egala cu Ω .

Obs.: S-a preferat o forma a semnalului generator simpla, cu suport finit. Din acest motiv spectrul semnalului generator este infinit.

Semnalul periodic se obtine prin produs de convolutie:

$$sp(t) = \int_{-\infty}^{\infty} sg(\tau) \delta_T(t - \tau) d\tau$$

Spectrul semnalului periodic se obtine prin produs algebric:

$$Sp(\omega) = Sg(\omega) \delta_\Omega(\omega).$$

Semnale esantionate

```
> ses:=(t)->sg(t)*delta[T](t,Tes);
```

$$ses := t \rightarrow sg(t) \delta_T(t, Tes)$$

```
> sg:=(t)->(sin(omega0*t)/(omega0*t));
```

$$sg := t \rightarrow \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$$

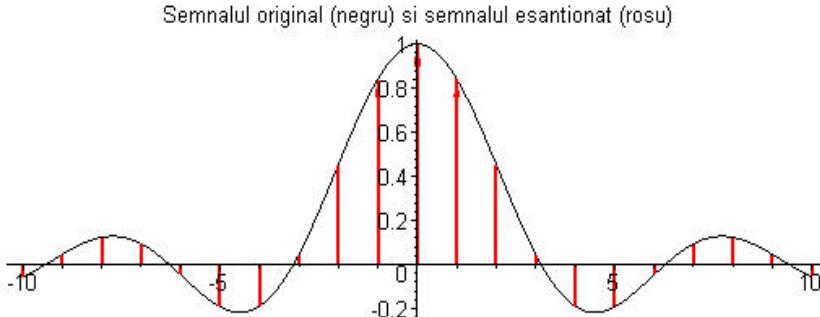
Spectrul semnalului generator si al semnalului esantionat:

```
> Sg(omega);sum(Omega*S[g](omega-n*Omega),`n`=-infinity..infinity);
```

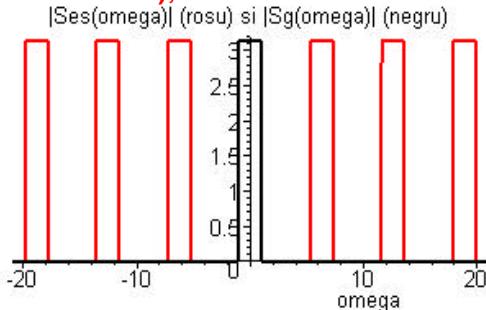
$$\frac{\pi (-1 + \text{Heaviside}(-\omega + \omega_0) + \text{Heaviside}(\omega + \omega_0))}{\omega_0}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega S_g(\omega - n \Omega)$$

```
> PLOT(rpa(collect(expand(ts(eval(ses(t),[Tes=1,omega0=1]),n=-20..20)),Dirac),t,interval=-10..10,tipgrafic=real culoare=[1,0,0]),rpa(eval(sg(t),omega0=1),t,interval=-10..10,tipgrafic=real culoare=[0,0,0]),TITLE("Semnalul original (negru) si semnalul esantionat (rosu)"));
```



```
> plot([eval(Sg(omega),[Tes=1,omega0=1]), ts(eval(Ses(omega),[Tes=1,omega0=1]),n=-5..5)],omega=-21..21, title="|Ses(omega)| (rosu) si |Sg(omega)| (negru)", color=[black,red],style=LINE, thickness=2 );
```



Concluzie: Spectrul unui semnal discret este periodic. Spectrul semnalului esantionat este o versiune periodizata a spectrului semnalului generator cu perioada Ω_{es} .

Obs.: S-a preferat o forma a semnalului generator mai complicata, cu suport infinit pentru ca spectrul semnalului generator sa fie finit.

Semnalul esantionat se obtine prin produs algebric:

$$ses(t) = sg(t) \delta_T(t)$$

Spectrul semnalului esantionat se obtine prin produs de convolutie:

$$Ses(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Sg(w) \delta_{\Omega}(w - \omega) dw}{2\pi}.$$

S-a ales o frecventa de esantionare care sa respecte teorema esantionarii astfel incit sa nu apara fenomen de *aliasing*.

Semnale periodice si esantionate

Definim semnalul periodic armonic de pulsatie ω_0 provenit dintr-un puls generator:

```
> sp:=(t)->cos(omega0*t):sg:=cos(omega0*t)*(Heaviside(t+Pi/omega0)-Heaviside(t-3*Pi/omega0));
> spes:=(t)->sp(t)*delta[T](t,Tes);
```

$$spes := t \rightarrow sp(t) \delta_T(t, Tes)$$

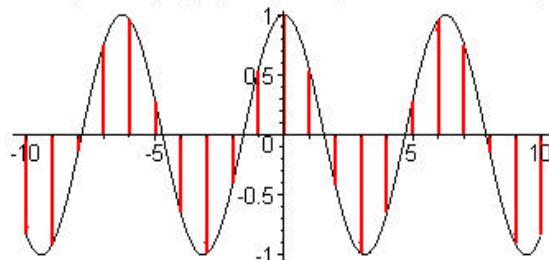
Spectrul semnalului esantionat este:

> Spes(omega);

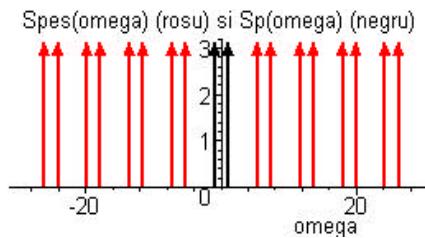
$$\frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\pi \text{Dirac}\left(\omega - \omega_0 - \frac{2n\pi}{Tes}\right)}{Tes} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\pi \text{Dirac}\left(\omega + \omega_0 - \frac{2n\pi}{Tes}\right)}{Tes} \right) \right)$$

```
> PLOT(rpa(collect(expand(ts(eval(spes(t),[Tes=1,omega0=1]),n=-20..20)),Dirac),t,interval=-10..10,tipgrafic=real culoare=[1,0,0]),rpa(eval(sp(t),omega0=1),t,interval=-10..10,tipgrafic=real culoare=[0,0,0]),TITLE("Semnalul periodic (negru) si semnalul periodic esantionat (rosu)"));
```

Semnalul periodic (negru) si semnalul periodic esantionat (rosu)



```
> PLOT(rpa(eval(Sp(omega)),[T=1, omega0=1]),omega,interval=-30..30,tipgrafic=modul,culoare=[0,0,0]), rpa(ts(eval(Sp(omega)),[T=1,omega0=1]),n=-20..20),omega,interval=-30..30,tipgrafic=modul,culoare=[1,0,0]), AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega",""),TITLE("Spes(omega) (rosu) si Sp(omega) (negru)");
```



Concluzie: Spectrul unui semnal discret si periodic este periodic si discret.

Semnificatia functiei de transfer

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	2
Ecuatie diferențiala pentru sisteme liniare analogice.....	2
Functia de transfer	2
Functia de transfer in regim permanent.....	3
Probleme.....	4

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Caracterizarea circuitului prin ecuatie diferențiala si functie de transfer.

Rezumat teoretic:

Ordinul de complexitate (OC) al unui circuit este dat de gradul ecuatiei diferențiale care îl descrie. Pentru circuite liniare OC se calculeaza cu relatia:

$$OC = n_C + n_L - n_B - n_S$$

în care:

n_C : este numarul de condensatoare din circuit;

n_L : este numarul de bobine din circuit;

n_B : este numarul de bucle de condensatoare din circuit (bucle formate numai din condensatoare si/sau surse de tensiune);

n_S : este numarul de sectiuni independente de bobine (formate numai din bobine si/sau surse de curent).

Un circuit liniar si invariant în timp cu ordinul de complexitate n este descris de o ecuatie diferențiala liniara cu coeficienti constanti de ordinul n.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

cu $m \leq n$ pentru cauzalitate

Aplicând ambilor termeni transformata Laplace si considerând conditiile initiale nule se obtine functia de transfer:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

În general functia de transfer se descompune sub forma:

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \text{ unde } z_i = \text{zerouri}, p_i = \text{poli in general complecsi}.$$

Un alt mod de a descompune functia de transfer este in polinoame de grad I sau II cu coeficienti reali:

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n_1} (s + z_i) \prod_{j=1}^{n_2} (s^2 + 2\mathbf{a}_j s + \mathbf{w}_{0j}^2)}{\prod_{k=1}^{n_3} (s + p_k) \prod_{l=1}^{n_4} (s^2 + 2\mathbf{a}_l s + \mathbf{w}_{0l}^2)}, \text{ unde } \begin{cases} \mathbf{a}_j^2 - \mathbf{w}_{0j}^2 < 0 \\ \mathbf{a}_l^2 - \mathbf{w}_{0l}^2 < 0 \end{cases}$$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru calcularea si reprezentarea singularitatilor functiei de transfer:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)
- functia **PZ[grafic]** [help](#)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlab",libname;
> with(inttrans):
> addtable(laplace,e(t),E(s),t,s):
> addtable(laplace,y(t),Y(s),t,s):
```

Ecuatie diferențiala pentru sisteme liniare analogice

Sa consideram ecuatia diferențiala:

```
> Fy:=(D@@@3)(y)(t)-3*(D@@@2)(y)(t):Fx:=(D@@@2)(e)(t)-e(t):eq:={Fy=Fx}:eq;
{ (D^(3))(y)(t) - 3 (D^(2))(y)(t) = (D^(2))(e)(t) - e(t) }
```

Consideram conditii initiale nule pentru iesire. Numarul conditiilor initiale asupra lui **y(t)** si a derivatelor sale este egal cu **n**, ordinul ecuatiei diferențiale.

```
> initcondy:={y(0)=0,D(y)(0)=0,(D@@@2)(y)(0)=0};
initcondy := { y(0) = 0, D(y)(0) = 0, (D^(2))(y)(0) = 0 }
```

In general aceasta ecuatie diferențiala liniara se poate rezolva:

```
> dsolve(eq union initcondy,y(t));
```

$$y(t) = \int_0^t \int_0^u e^{(-3u)} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} e(u) \right) - e(u) \right) du e^{(3t)} dt dt$$

Rezultatul este o expresie pentru **y(t)** in care trebuie sa determinam 2 constante de integrare pe baza conditiilor initiale nule.

Putem considera conditii initiale nule si pentru intrare:

```
> initcondx:={e(0)=0,D(e)(0)=0};
```

Aplicind Transformata Laplace si luand in considerare conditiile initiale nule:

```
> eqL:=subs(initcondy,laplace(Fy,t,s))=subs(initcondx,laplace(Fx,t,s)):eqL;
s^3 Y(s) - 3 s^2 Y(s) = s^2 E(s) - E(s)
```

```
> H:=(s)->solve(eqL,Y(s))/E(s):H:=H(s);
```

$$H := \frac{s^2 - 1}{s^2 (s - 3)}$$

Functia de transfer

Interpretarea functiei de transfer si reprezentarea ei pentru s numar complex:

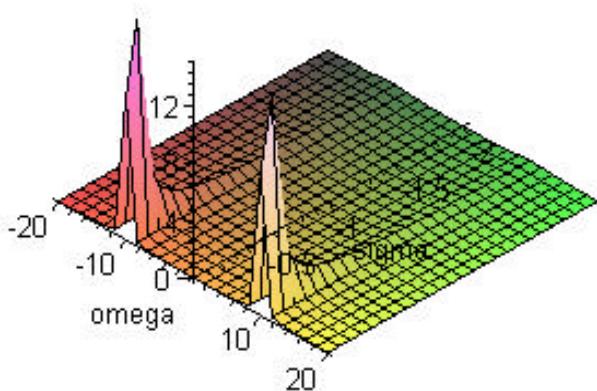
```
> H:=s/(s^2+0.1*s+100);
```

$$H := \frac{s}{s^2 + .1 s + 100}$$

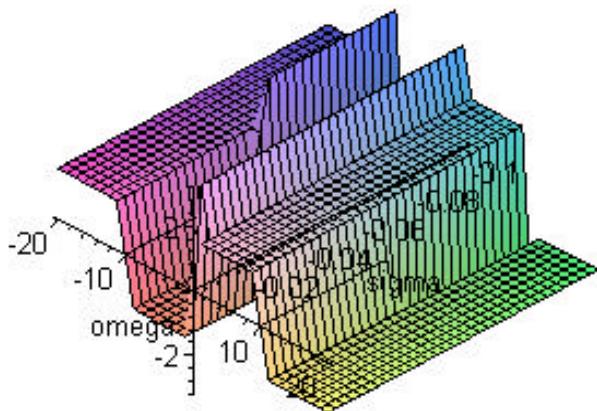
```
> PZ[numeric](H,s);
```

$$\begin{bmatrix} zI & 0 \\ p1 & -.05000 + 10.00I \\ p2 & -.05000 - 10.00I \end{bmatrix}$$

```
> PZ[grafic](H,s);
> plot3d(abs(eval(H,s=sigma+l*omega)),sigma=-2..0,omega=-
20..20,axes=normal,title="Reprezentarea in spatiu a modulului f.d.t.");
Reprezentarea in spatiu a modulului f.d.t.
```



```
> plot3d(argument(eval(H,s=sigma+l*omega)),sigma=-0.1..0,omega=-20..20,numpoints =
1000,axes=normal,title="Reprezentarea in spatiu pentru argumentul f.d.t.");
Reprezentarea in spatiu pentru argumentul f.d.t.
```



Functia de transfer in regim permanent

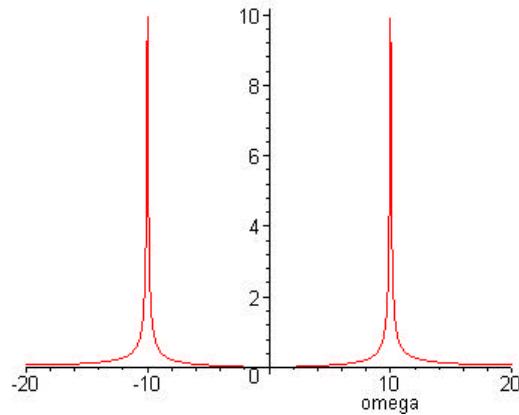
```
> eval(H,s=l*omega);

$$\frac{l\omega}{-\omega^2 + .1l\omega + 100}$$

> plot(abs(eval(H,s=l*omega)),omega=-20..20,axes=normal,title="Reprezentarea modulului f.d.t.
pentru regim permanent");
```

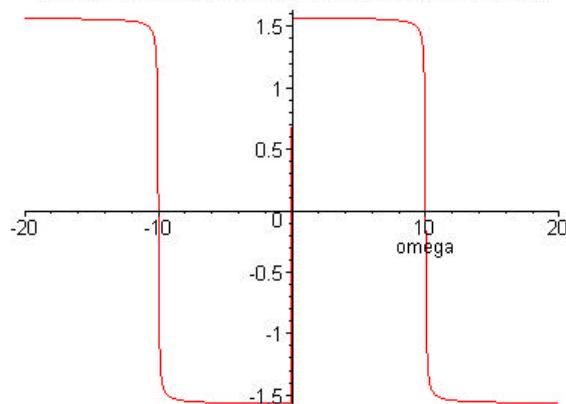
Semnificatia functiei de transfer

Reprezentarea modului f.d.t. pentru regim permanent



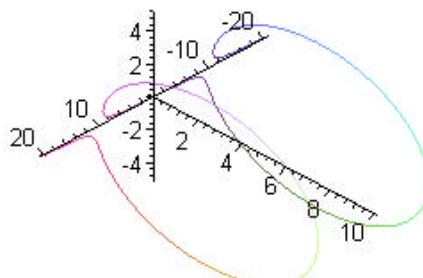
```
> plot(argument(eval(H,s=l*omega)),omega=-20..20,axes=normal,title="Reprezentarea argumentului f.d.t. pentru regim permanent");
```

Reprezentarea argumentului f.d.t. pentru regim permanent



```
> plots[spacecurve]([omega,Re(eval(H,s=l*omega)),Im(eval(H,s=l*omega))),omega=-20..20,numpoints = 10000,axes=normal,title="Reprezentarea spatiala a F.D.T. pentru regim permanent" );
```

Reprezentarea spatiala a F.D.T. pentru regim permanent



Probleme. Intrebari

1. Care este semnificatia functiei de transfer? Care este semnificatia functiei de transfer in regim permanent?

2. Sa se refaca etapele de calcul pentru functiile de transfer:

```
> H := 1/(s+1);
```

$$H := \frac{1}{s + 1}$$

```
> H:=1/(s+1)/(s^2+10*s+100);
```

$$H := \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 10s + 100)}$$

Trasarea diagramelor Bode si a diagramei polare

Partea I: Functii de transfer elementare

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Diagrame Bode liniarizate pe portiuni	2
Mod de lucru	2
Functii de transfer elementare	3
Zerou simplu in origine	3
Pol simplu in origine.....	4
Zerou simplu pe axa reala	5
$\alpha_0 < 0$	5
$\alpha_0 > 0$	6
Pol simplu pe axa reala	7
$\alpha_0 < 0$	7
$\alpha_0 > 0$	8
Zerouri simple complex conjugate	9
$\alpha_0 < 0$	9
$\alpha_0 > 0$	10
Zerouri simple complex conjugate pe axa imaginara	11
Poli simpli complex conjugati.....	12
$\alpha_0 < 0$	12
$\alpha_0 > 0$	13
Poli simpli complex conjugati pe axa imaginara.....	14
Probleme. Intrebari.....	15

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Partea I: Functii de transfer elementare - determinarea regulilor de trasare rapida a diagramelor Bode

Partea II: Functii de transfer de ordinul I si II - diagramele Bode si polara pentru functiile de transfer corespunzatoare unor filtre de tip FTJ, FTB, FTS, FTT.

Partea III: Functii de transfer ale unor circuite reale - utilizarea in exemple complexe a regulilor de trasare rapida

Rezumat teoretic:

Pentru trasarea rapida a diagramelor Bode ale unei functii de transfer a carei expresie analitica este cunoscuta:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

este necesara factorizarea expresiei de mai sus sub forma:

$$H(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n_1} (s + z_i) \prod_{j=1}^{n_2} (s^2 + 2\mathbf{a}_j s + \mathbf{w}_{0j}^2)}{\prod_{k=1}^{n_3} (s + p_k) \prod_{l=1}^{n_4} (s^2 + 2\mathbf{a}_l s + \mathbf{w}_{0l}^2)}, \text{ unde } \begin{cases} \mathbf{a}_j^2 - \mathbf{w}_{0j}^2 < 0 \\ \mathbf{a}_l^2 - \mathbf{w}_{0l}^2 < 0 \end{cases}$$

Dupa realizarea acestei factorizari, trasarea rapida a diagramelor Bode de câstig si de faza, se poate face aplicând niste reguli foarte simple rezumate în urmatorul tabel:

	Cazuri	Pulsatia la care se produce modificarea	Modificarea adusa pantei caracteristicii de castig	Alte influente asupra caracteristicii de castig	Modif. adusa caract. de faza
$s + z_i$	$z_i > 0$	z_i	+20dB/dec	-	crestere cu p/2
	$z_i < 0$				scadere cu p/2
$\frac{1}{s + p_k}$	$p_k > 0$	p_k	-20dB/dec	-	scadere cu p/2
	$p_k < 0$				crestere cu p/2
$s^2 + 2\mathbf{a}_j s + \mathbf{w}_{0j}^2$	$2a_j > 0$	\mathbf{w}_{0j}	+40dB/dec	supra - atenuare la ω_0 egala cu $Q = \omega_0 / 2a_j$ [dB]	crestere cu p
	$2a_j < 0$				scadere cu p
$\frac{1}{s^2 + 2\mathbf{a}_l s + \mathbf{w}_{0l}^2}$	$2a_l > 0$	\mathbf{w}_{0l}	-40dB/dec	supra - crestere la ω_0 egala cu $Q = \omega_0 / 2a_l$ [dB]	scadere cu p
	$2a_l < 0$				crestere cu p

Diagrame Bode liniarizate pe portiuni

Pentru diagramele Bode, castigul si faza se pot aproxima conform urmatorului rationament:

Functia de transfer	Aproximarea cistigului $G(\omega)$	Aproximarea fazei
$s + z_i$	$G(\omega) = \begin{cases} 20\log(z_i) & \text{pentru } \omega \ll z_i \\ 20\log(\omega) & \text{pentru } \omega \gg z_i \end{cases}$	$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \omega \ll z_i \\ \arg(z_i) & \text{pentru } \omega \gg z_i \end{cases}$
$\frac{1}{s + p_k}$	$G(\omega) = \begin{cases} 20\log(\omega) & \text{pentru } \omega \ll p_k \\ 20\log(p_k) & \text{pentru } \omega \gg p_k \end{cases}$	$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \omega \ll p_k \\ \arg(p_k) & \text{pentru } \omega \gg p_k \end{cases}$
$s^2 + 2\mathbf{a}_j s + \mathbf{w}_{0j}^2$	$G(\omega) = \begin{cases} 40\log(\mathbf{w}_{0j}) & \text{pentru } \omega \ll \mathbf{w}_{0j} \\ 40\log(\omega) & \text{pentru } \omega \gg \mathbf{w}_{0j} \end{cases}$	$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \omega \ll \mathbf{w}_{0j} \\ \text{sign}(\mathbf{a}_j) \cdot p & \text{pentru } \omega \gg \mathbf{w}_{0j} \end{cases}$
$\frac{1}{s^2 + 2\mathbf{a}_l s + \mathbf{w}_{0l}^2}$	$G(\omega) = \begin{cases} 40\log(\omega) & \text{pentru } \omega \ll \mathbf{w}_{0l} \\ 40\log(\mathbf{w}_{0l}) & \text{pentru } \omega \gg \mathbf{w}_{0l} \end{cases}$	$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \omega \ll \mathbf{w}_{0l} \\ -\text{sign}(\mathbf{a}_l) \cdot p & \text{pentru } \omega \gg \mathbf{w}_{0l} \end{cases}$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru trasarea diagramele Bode de castig si faza, precum si a diagramelor polare:

- functia **Bode[castig]** [help](#)
- functia **Bode[faza]** [help](#)
- functia **Bode[polară]** [help](#)

Pentru calcularea si reprezentarea singularitatilor functiei de transfer:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)
- functia **PZ[grafic]** [help](#)

> **restart**:

> **libname:="..../SCSlab",libname:**

Functii de transfer elementare

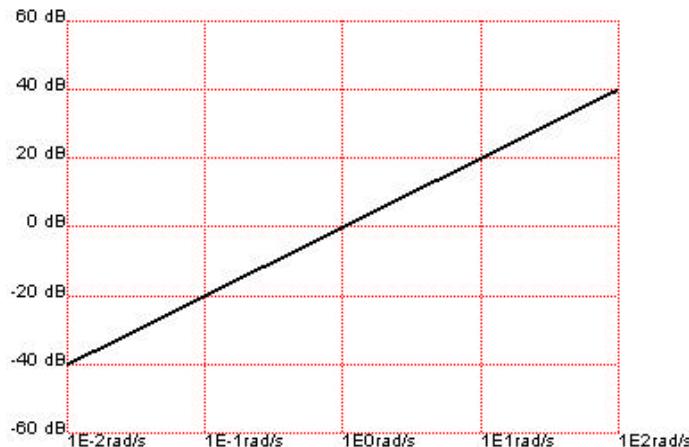
Zerou simplu in origine

> **H:=s:**
> **PZ[numeric](H,s);**

$$[zI \quad 0.]$$

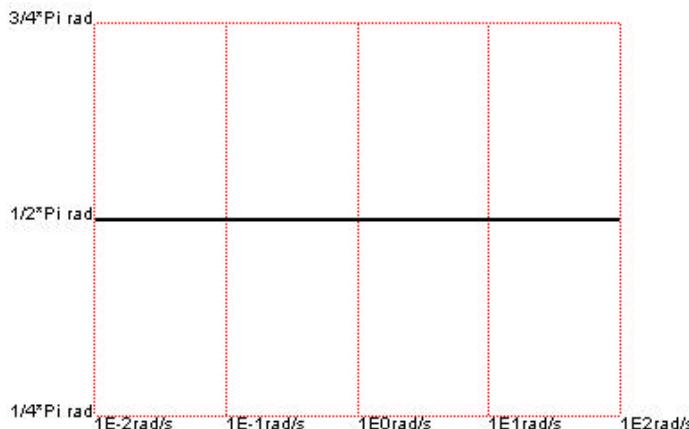
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



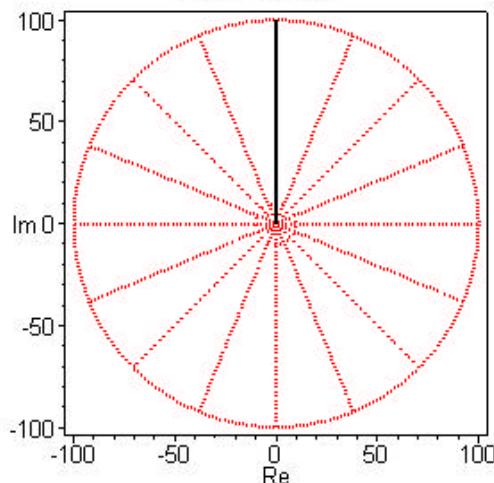
> **Bode[faza](H);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H);**

Diagrama polară



Pol simplu in origine

> **H:=1/s;**
> **PZ[numeric](H,s);**

[p1 0.]

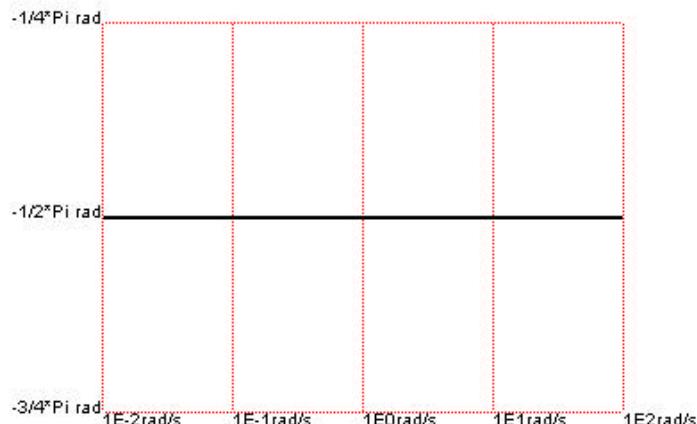
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



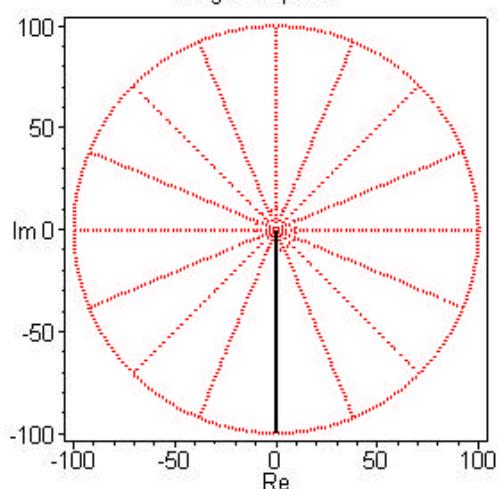
> **Bode[faza](H);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H);**

Diagrama polară



Zerou simplu pe axa reală

Functia de transfer in acest caz este de forma:

> **H:=s-alpha0;**

$$H := s - \alpha_0$$

$$\alpha_0 < 0$$

> **eval(H,alpha0=-1);**

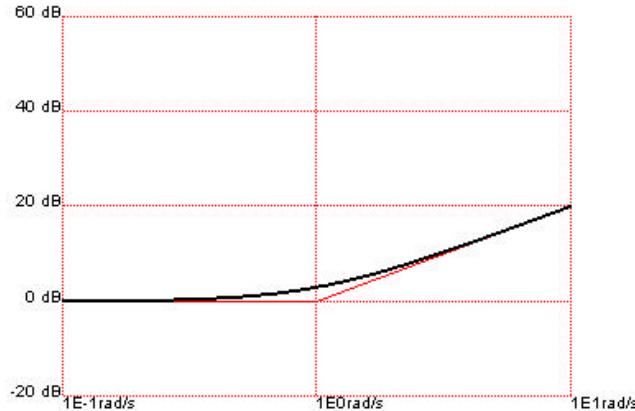
$$s + 1$$

> **PZ[numeric](eval(H,alpha0=-1),s);**

$$[zI \quad -1.]$$

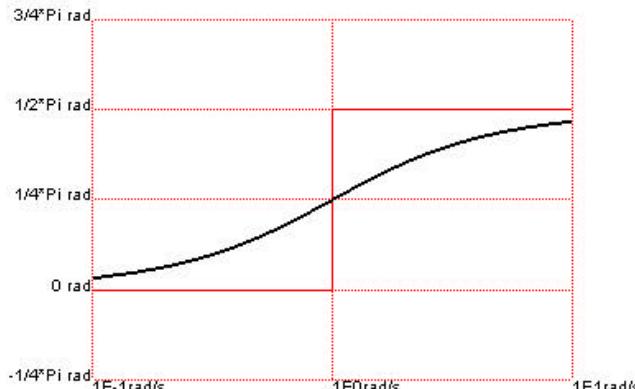
> **Bode[castig](eval(H,alpha0=-1));**

Diagrama Bode de castig



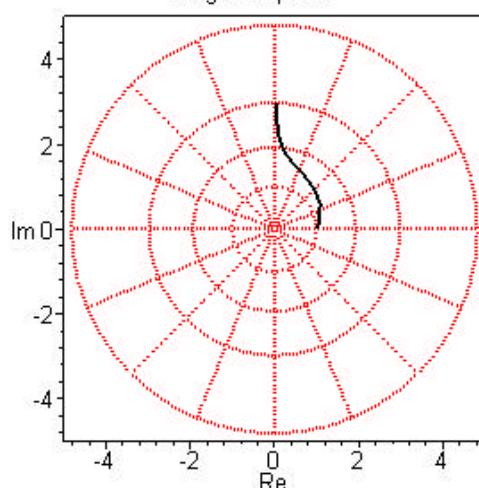
> **Bode[faza](eval(H,alpha0=-1));**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](eval(H,alpha0=-1),compresie=[4,1]);**

Diagrama polară



$\alpha_0 > 0$

> eval(H,alpha0=1);

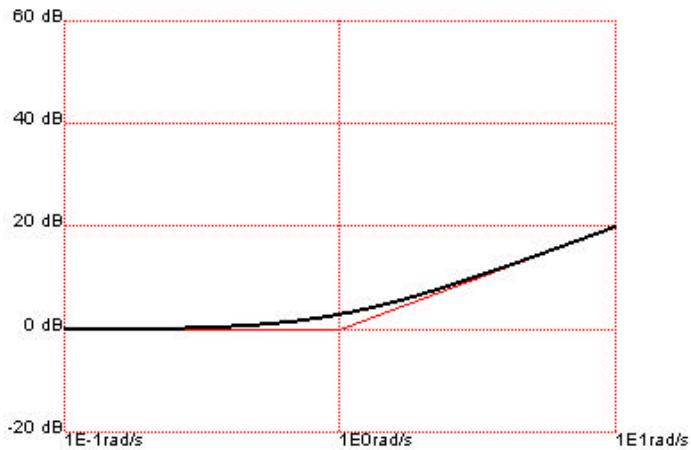
$s = 1$

> PZ[numeric](eval(H,alpha0=1),s);

$[zI \quad 1.]$

> Bode[castig](eval(H,alpha0=1));

Diagrama Bode de castig



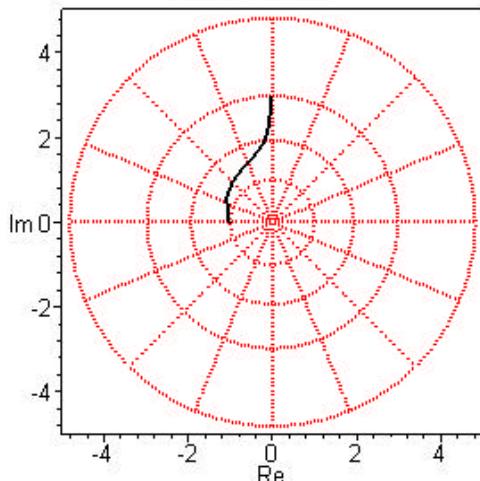
> Bode[faza](eval(H,alpha0=1));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,alpha0=1),compresie=[4,1]);

Diagrama polară



Concluzie. Diagramale de castig sunt identice in cele doua cazuri anterioare, fiind distincte diagramele de faza.

Pol simplu pe axa reală

Functia de transfer in acest caz este de forma:

> **H:=1/(s-alpha0);**

$$H := \frac{1}{s - \alpha_0}$$

$$\alpha_0 < 0$$

> **eval(H,alpha0=-1);**

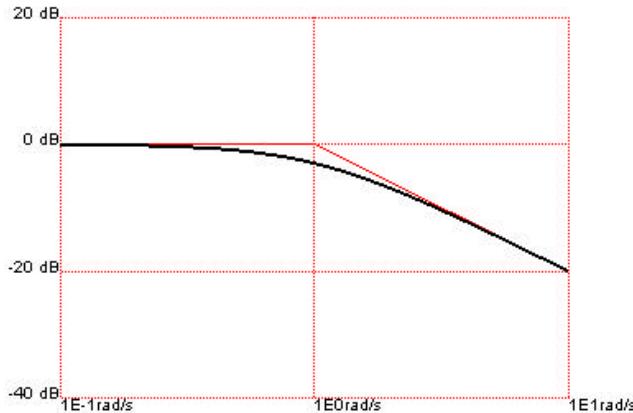
$$\frac{1}{s + 1}$$

> **PZ[numeric](eval(H,alpha0=-1),s);**

$$[p1 \quad -1.]$$

> **Bode[castig](eval(H,alpha0=-1));**

Diagrama Bode de castig



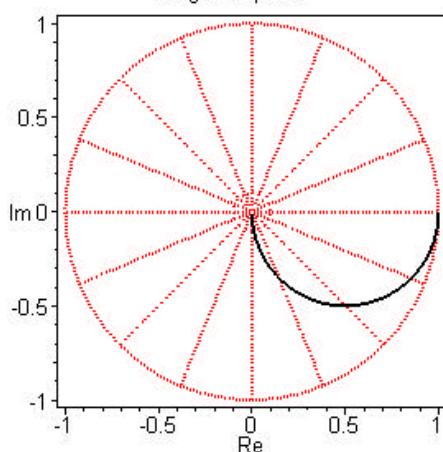
> **Bode[faza](eval(H,alpha0=-1));**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](eval(H,alpha0=-1));**

Diagrama polară



$\alpha_0 > 0$

> eval(H,alpha0=1);

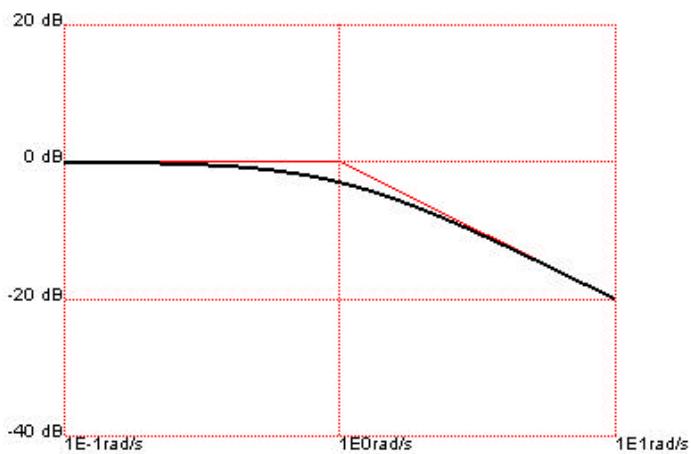
$$\frac{1}{s-1}$$

> PZ[numeric](eval(H,alpha0=1),s);

$$[pI \quad 1.]$$

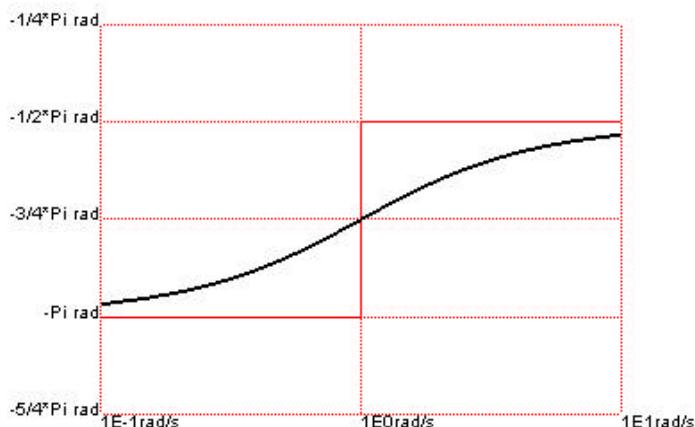
> Bode[castig](eval(H,alpha0=1));

Diagrama Bode de castig



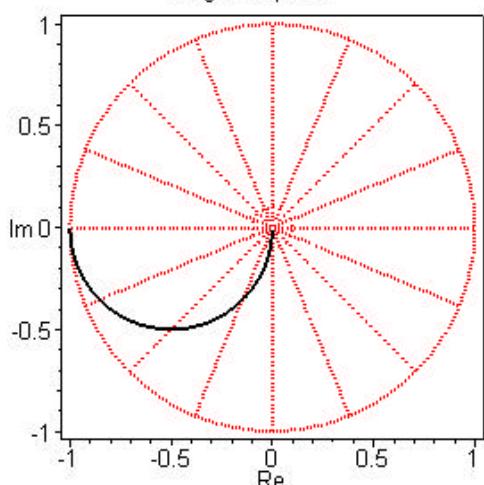
> Bode[faza](eval(H,alpha0=1));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,alpha0=1));

Diagrama polară



Concluzie. Diagramale de castig sunt identice in cele doua cazuri anterioare, fiind distincte diagramele de faza.

Zerouri simple complex conjugate

Functia de transfer in acest caz este de forma:

> **H:=s^2-2*alpha0*s+omega0^2;**

$$H := s^2 - 2 \alpha_0 s + \omega_0^2$$

$$\alpha_0 < 0$$

> **eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]);**

$$s^2 + .10 s + 1$$

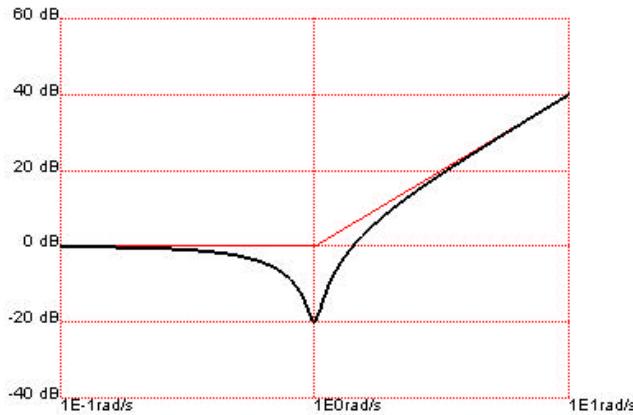
> **PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),s);**

$$\begin{bmatrix} z_1 & -.05000 + .9987 I \\ z_2 & -.05000 - .9987 I \end{bmatrix}$$

> **PZ[grafic](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),s);**

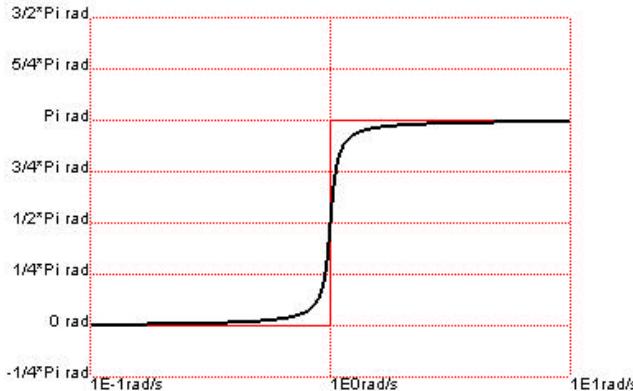
> **Bode[castig](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]));**

Diagrama Bode de castig



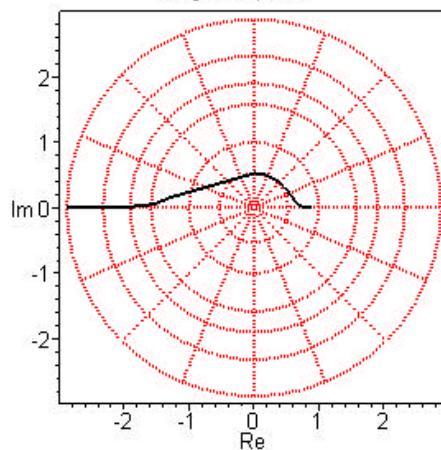
> **Bode[faza](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]));**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),compresie=[8,1]);**

Diagrama polară



$$\alpha_0 > 0$$

```
> eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]);
```

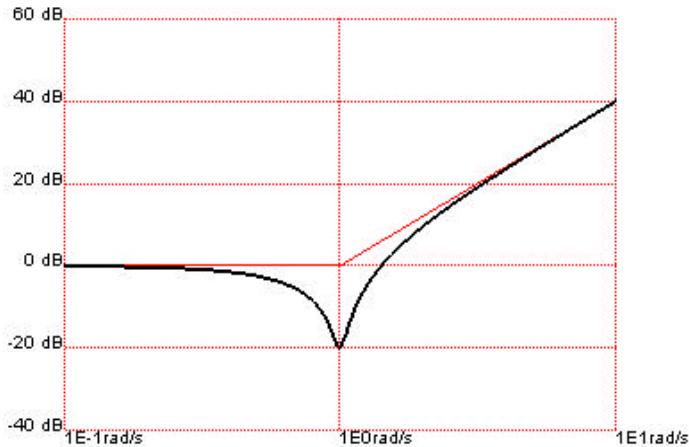
$$s^2 - .10 s + 1$$

```
> PZ[numeric](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]),s);
```

$$\begin{bmatrix} z1 & .05000 + .9987 I \\ z2 & .05000 - .9987 I \end{bmatrix}$$

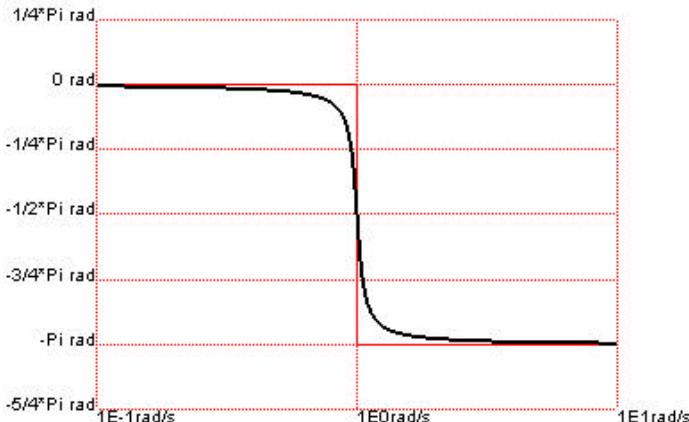
```
> Bode[castig](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]));
```

Diagrama Bode de castig



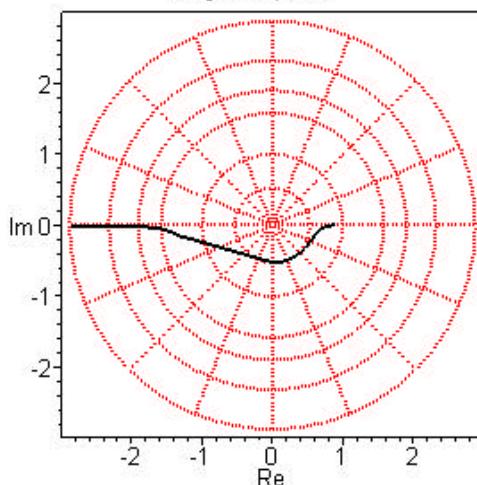
```
> Bode[faza](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]));
```

Diagrama Bode de faza



```
> Bode[polar](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]),compresie=[8,1]);
```

Diagrama polară



Zerouri simple complex conjugate pe axa imaginara> **H:=s^2+omega0^2;**

$$H := s^2 + \omega_0^2$$

> **eval(H,omega0=10);**

$$s^2 + 100$$

> **PZ[numeric](eval(H,omega0=10),s);**

$$\begin{bmatrix} z1 & 10.00I \\ z2 & -10.00I \end{bmatrix}$$

> **Bode[castig](eval(H,omega0=10));**

Diagrama Bode de castig

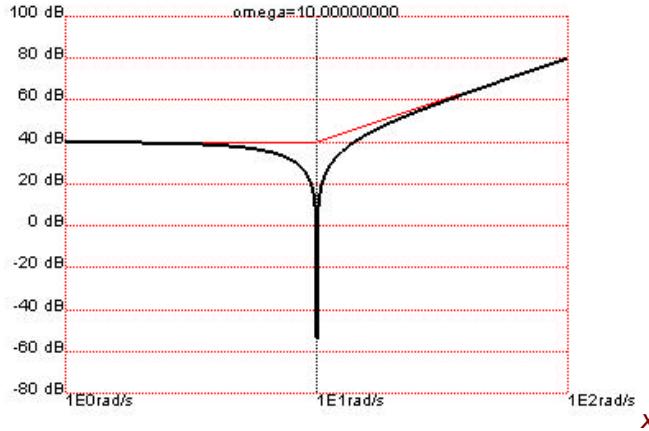
> **Bode[faza](eval(H,omega0=10));**

Diagrama Bode de faza

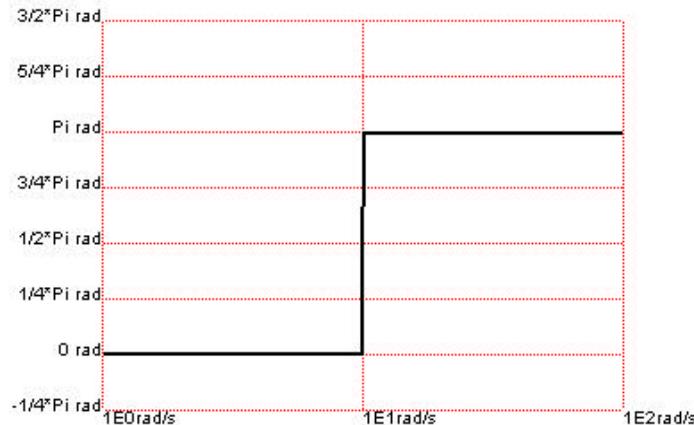
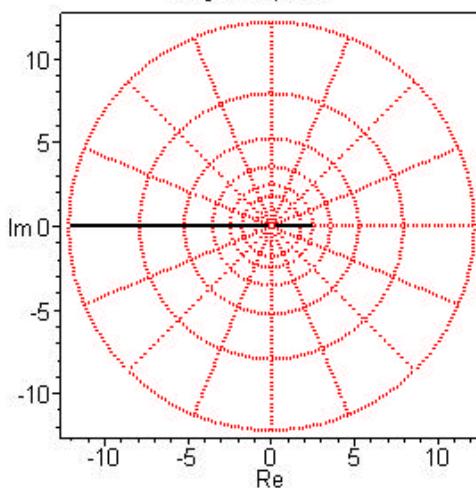
> **Bode[polar](eval(H,omega0=10),compresie=[5,1]);**

Diagrama polara



Poli simpli complex conjugati

In acest caz functia de transfer este:

> $H := 1/(s^2 - 2\alpha_0 s + \omega_0^2);$

$$H := \frac{1}{s^2 - 2\alpha_0 s + \omega_0^2}$$

$\alpha_0 < 0$

> $\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]);$

$$\frac{1}{s^2 + .10 s + 1}$$

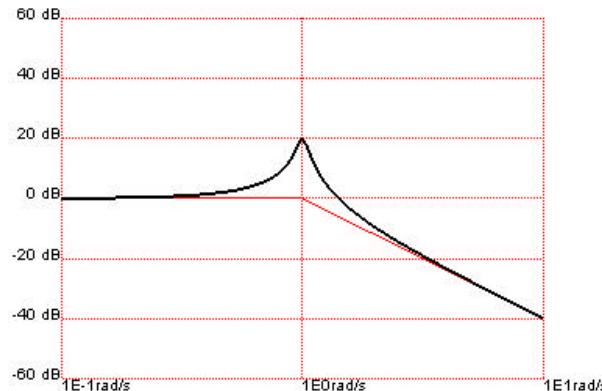
> $\text{PZ}[\text{numeric}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]), s);$

$$\begin{bmatrix} p1 & -.05000 + .9987 I \\ p2 & -.05000 - .9987 I \end{bmatrix}$$

> $\text{PZ}[\text{grafic}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]), s);$

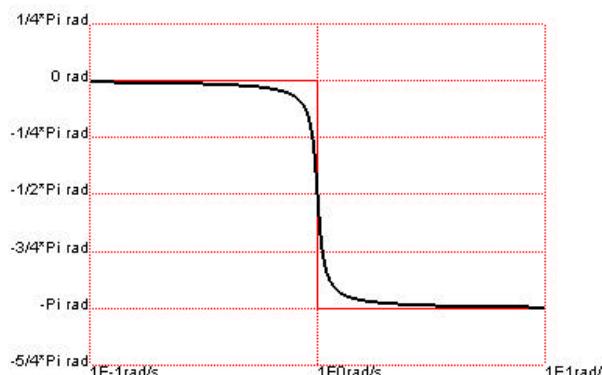
> $\text{Bode}[\text{castig}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]));$

Diagrama Bode de castig



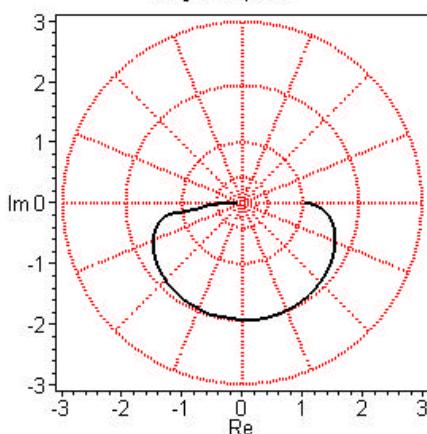
> $\text{Bode}[\text{faza}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]));$

Diagrama Bode de faza



> $\text{Bode}[\text{polara}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]), \text{compresie} = [4, 1]);$

Diagrama polara



$\alpha_0 > 0$ **> eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]);**

$$\frac{1}{s^2 - .10 s + 1}$$

> PZ[numeric](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]),s);

$$\begin{bmatrix} p1 & .05000 + .9987 I \\ p2 & .05000 - .9987 I \end{bmatrix}$$

> Bode[castig](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]));

Diagrama Bode de castig

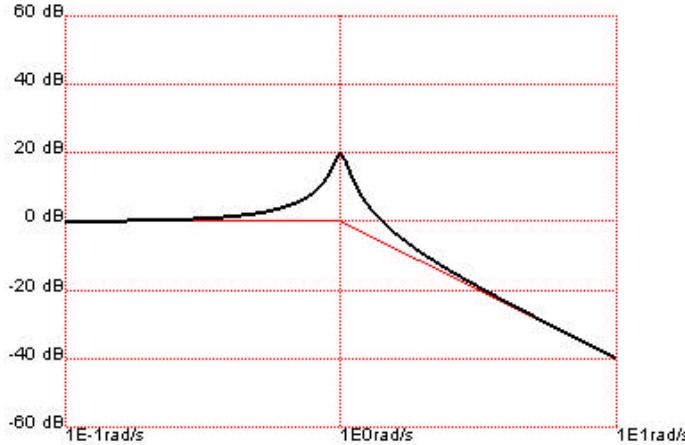
**> Bode[faza](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]));**

Diagrama Bode de faza

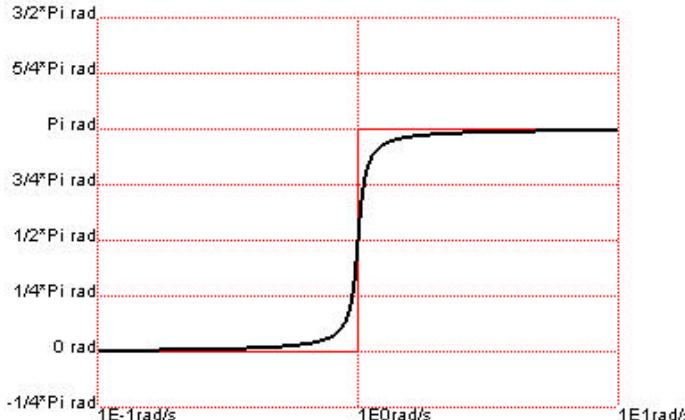
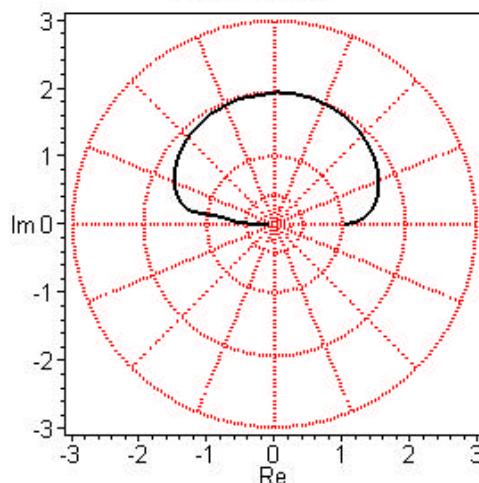
**> Bode[polar](eval(H,[alpha0=0.05,omega0=1]),compresie=[4,1]);**

Diagrama polară



Poli simpli complex conjugati pe axa imaginara

> $H := 1/(s^2 + \omega_0^2)$;

$$H := \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

> eval(H,omega0=10);

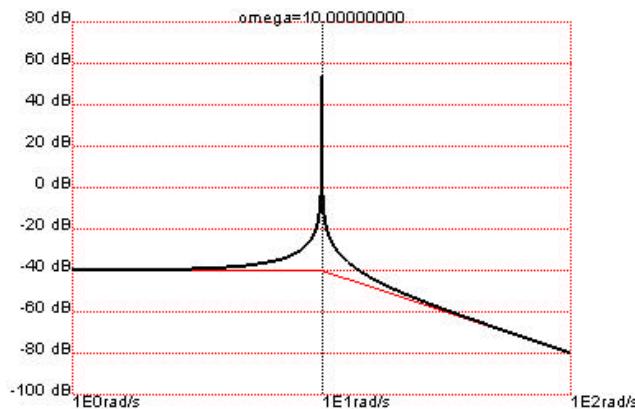
$$\frac{1}{s^2 + 100}$$

> PZ[numeric](eval(H,omega0=10),s);

$$\begin{bmatrix} p1 & 10.00I \\ p2 & -10.00I \end{bmatrix}$$

> Bode[castig](eval(H,omega0=10));

Diagrama Bode de castig



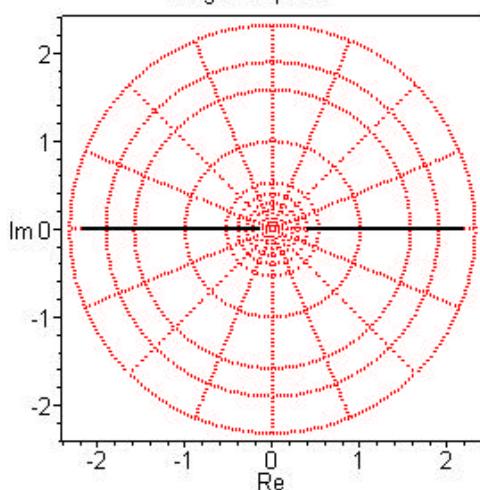
> Bode[faza](eval(H,omega0=10));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,omega0=10),compresie=[8,1]);

Diagrama polară



Probleme. Intrebari

Sa se reprezinte manual si sa se verifice cu ajutorul calculatorului diagramele Bode de castig si faza, precum si diagrama polara pentru functiile de transfer:

> **H:=-s;**

$$H := -s$$

> **H:=-1/s;**

$$H := -\frac{1}{s}$$

> **H:=-(s+100);**

$$H := -s - 100$$

> **H:=-1/(s+100);**

$$H := -\frac{1}{s + 100}$$

> **H:=s^2+50*s+10000;**

$$H := s^2 + 50s + 10000$$

> **H:=s^2+100*s+10000;**

$$H := s^2 + 100s + 10000$$

> **H:=s^2+200*s+10000;**

$$H := s^2 + 200s + 10000$$

> **H:=1/(s^2+50*s+10000);**

$$H := \frac{1}{s^2 + 50s + 10000}$$

> **H:=1/(s^2+100*s+10000);**

$$H := \frac{1}{s^2 + 100s + 10000}$$

> **H:=1/(s^2+200*s+10000);**

$$H := \frac{1}{s^2 + 200s + 10000}$$

> **H:=-s^2+10000;**

$$H := -s^2 - 10000$$

> **H:=-1/(s^2+10000);**

$$H := -\frac{1}{s^2 + 10000}$$

Trasarea diagramelor Bode si a diagramei polare

Partea a II-a: Functii de transfer de ordinul I si II

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Mod de lucru	1
Exemple	1
Filtre de ord. I	2
Filtru trece jos de ord. I	2
Filtru trece sus de ord. I	3
Filtru trece tot de ord. I.....	4
Filtru de ord. II	5
Filtru trece jos de ord. II	5
Poli complex conjugati cu parte reala negativa	5
Pol real dublu cu parte reala negativa	6
Poli reali distincti cu parte reala negativa	7
Filtru trece banda de ord. II.....	8
Poli complex conjugati cu parte reala negativa	8
Pol real dublu cu parte reala negativa	9
Poli reali distincti cu parte reala negativa	10
Filtru trece sus de ord. II	11
Poli complex conjugati cu parte reala negativa	11
Pol real dublu cu parte reala negativa	12
Poli reali distincti cu parte reala negativa	13
Filtru trece tot de ord. II.....	14
Exemplul III:.....	15
Probleme. Intrebari.....	16

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru trasarea diagramelor Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare:

- functia **Bode[castig]** [help](#)
- functia **Bode[faza]** [help](#)
- functia **Bode[polară]** [help](#)

Pentru calcularea si reprezentarea singularitatilor functiei de transfer:

- functia **PZ[numerical]** [help](#)
- functia **PZ[grafic]** [help](#)

```
> restart:  
> libname:="..../SCSlab",libname:
```

Exemple

Filtre de ord. I

Filtru trece jos de ord. I

Ne propunem trasarea diagramei Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare pentru functia de transfer:

> **H:=1/(s+alpha0);**

$$H := \frac{1}{s + \alpha_0}$$

> **eval(H,[alpha0=10]);**

$$\frac{1}{s + 10}$$

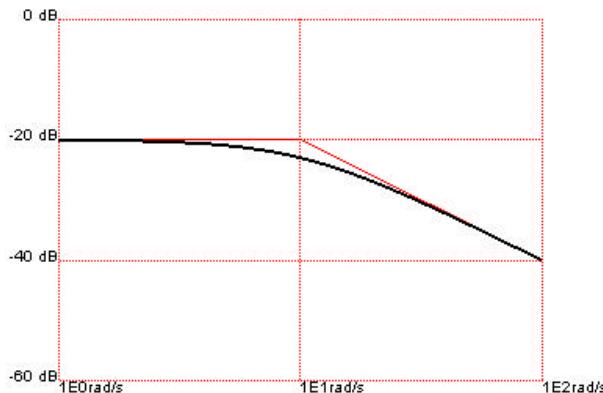
> **PZ[numeric](eval(H,alpha0=10),s);**

[pI -10.]

> **PZ[grafic](eval(H,alpha0=10),s);**

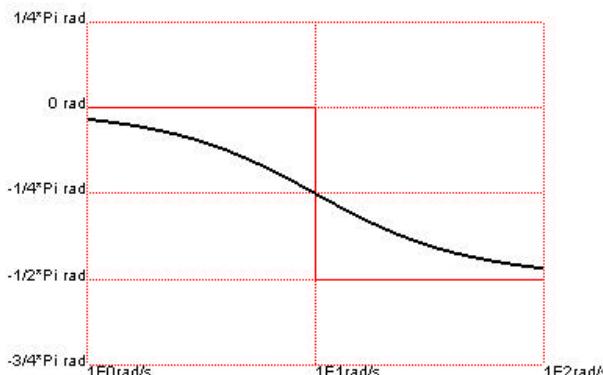
> **Bode[castig](eval(H,alpha0=10));**

Diagrama Bode de castig



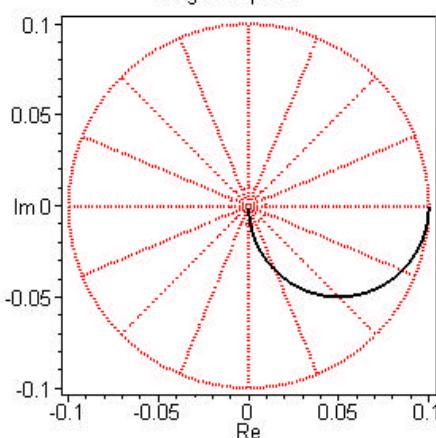
> **Bode[faza](eval(H,alpha0=10));**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](eval(H,alpha0=10));**

Diagrama polară



Filtru trece sus de ord. I

Ne propunem trasarea diagramele Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare pentru functia de transfer:

> **H:=s/(s+alpha0);**

$$H := \frac{s}{s + \alpha_0}$$

> **eval(H,[alpha0=10]);**

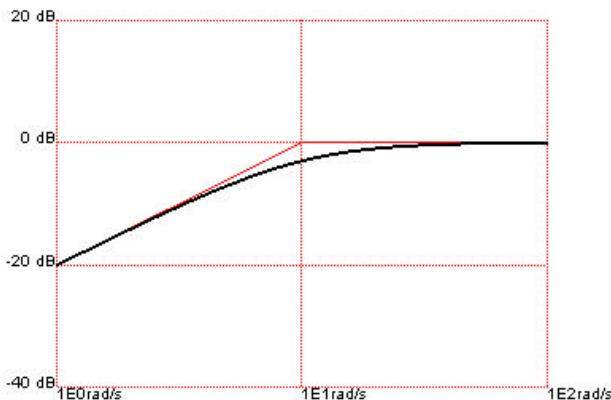
$$\frac{s}{s + 10}$$

> **PZ[numeric](eval(H,[alpha0=10]),s);**

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0. \\ p_1 & -10. \end{bmatrix}$$

> **Bode[castig](eval(H,alpha0=10));**

Diagrama Bode de castig



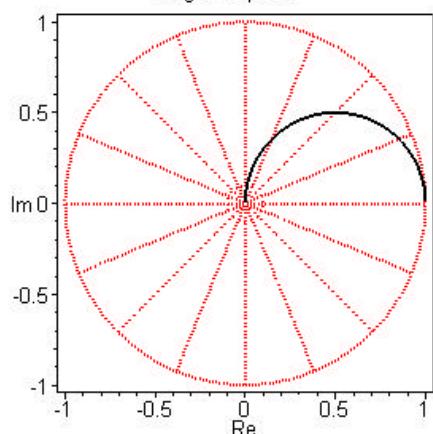
> **Bode[faza](eval(H,alpha0=10));**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](eval(H,alpha0=10));**

Diagrama polară



Filtru trece tot de ord. I

Ne propunem trasarea diagramele Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare pentru functia de transfer:

> $H := k * (s - \alpha_0) / (s + \alpha_0)$;

$$H := \frac{k(s - \alpha_0)}{s + \alpha_0}$$

> $\text{eval}(H, [k=2, \alpha_0=10])$;

$$2 \frac{s - 10}{s + 10}$$

> $\text{PZ}[\text{numeric}](\text{eval}(H, [k=2, \alpha_0=10]), s)$;

$$\begin{bmatrix} zI & 10. \\ pI & -10. \end{bmatrix}$$

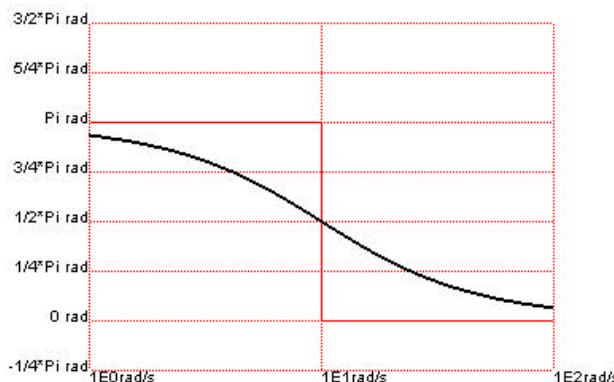
> $\text{Bode}[\text{castig}](\text{eval}(H, [k=2, \alpha_0=10]))$;

Diagrama Bode de castig



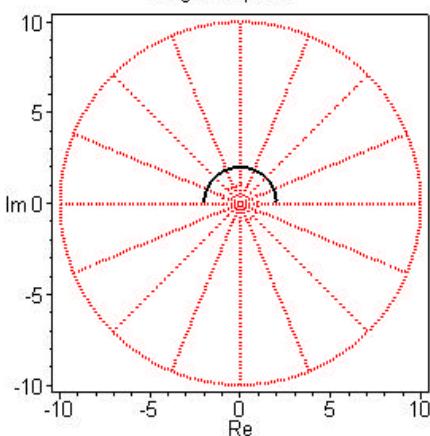
> $\text{Bode}[\text{faza}](\text{eval}(H, [k=2, \alpha_0=10]))$;

Diagrama Bode de faza



> $\text{Bode}[\text{polara}](\text{eval}(H, [k=2, \alpha_0=10]))$;

Diagrama polara



Filtru de ord. II

Ne propunem trasarea diagramelor Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare pentru functia de transfer:

Filtru trece jos de ord. II

$$> H:=1/(s^2-2\alpha_0 s+\omega_0^2); \quad H := \frac{1}{s^2 - 2\alpha_0 s + \omega_0^2}$$

Poli complex conjugati cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul polilor complex conjugati in semiplanul sting:

> eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]);

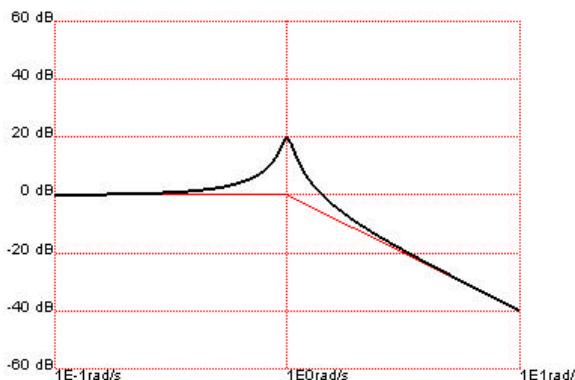
$$\frac{1}{s^2 + .10 s + 1}$$

> PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),s); PZ[grafic](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),s);

$$\begin{bmatrix} p1 & -.05000 + .9987I \\ p2 & -.05000 - .9987I \end{bmatrix}$$

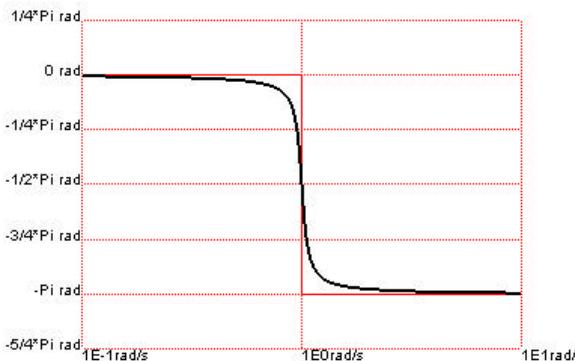
> Bode[castig](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]));

Diagrama Bode de castig



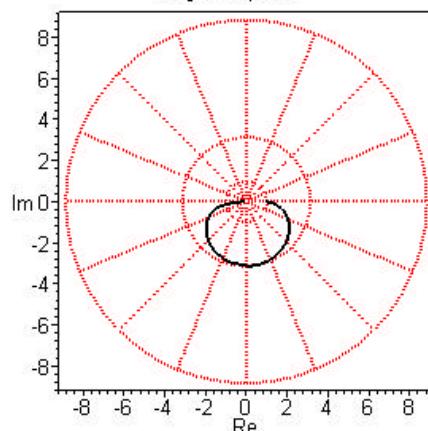
> Bode[faza](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),compresie=[2,1]);

Diagrama polară



Pol real dublu cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul unui pol real dublu in semiplanul sting:

> eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]);

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

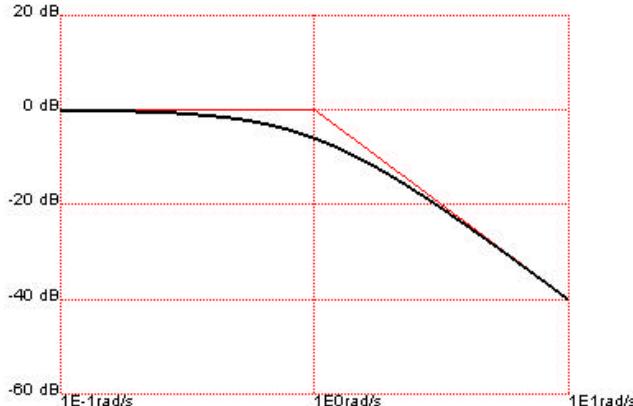
> PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]),s);

$$\begin{bmatrix} p_1 & -1. \\ p_2 & -1.000 \end{bmatrix}$$

> PZ[grafic](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]),s);

> Bode[castig](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));

Diagrama Bode de castig



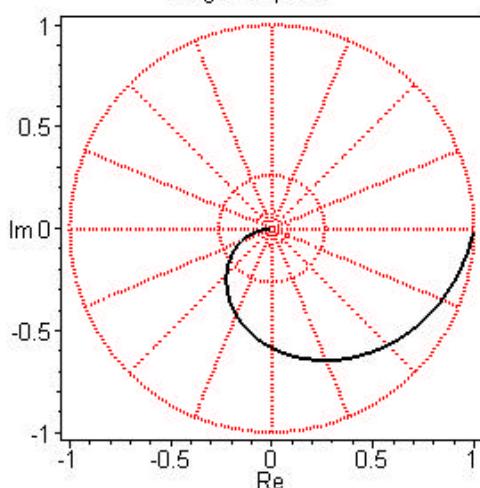
> Bode[faza](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]),compresie=[2,1]);

Diagrama polară



Poli reali distincti cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul unor poli distincti reali in semiplanul sting:

> **eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]);**

$$\frac{1}{s^2 + 10 \cdot 10 s + 1}$$

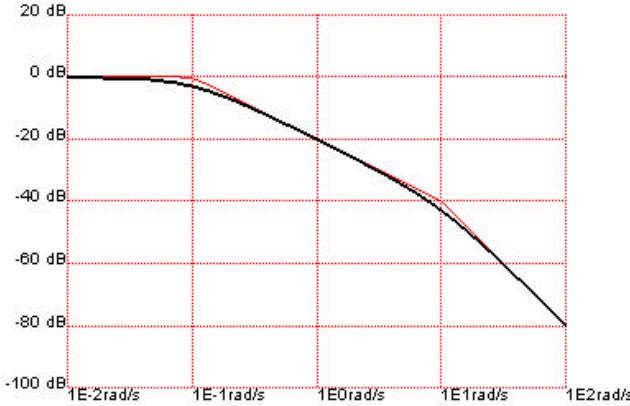
> **PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),s);**

$$\begin{bmatrix} p1 & -1000 \\ p2 & -10.00 \end{bmatrix}$$

> **PZ[grafic](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),s);**

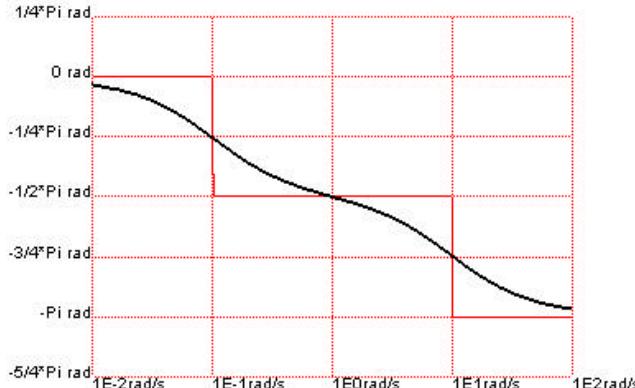
> **Bode[castig](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]));**

Diagrama Bode de castig



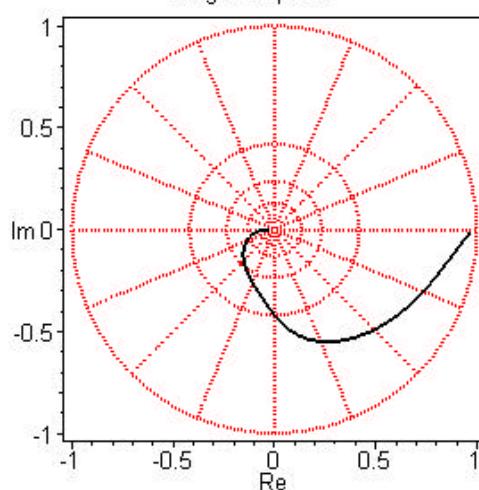
> **Bode[faza](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),numarpuncte=1000);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),compresie=[4,1],numarpuncte=1000);**

Diagrama polară



Filtru trece banda de ord. II

> $H := 2\alpha_0 s / (s^2 - 2\alpha_0 s + \omega_0^2)$;

$$H := 2 \frac{\alpha_0 s}{s^2 - 2 \alpha_0 s + \omega_0^2}$$

Poli complex conjugati cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul polilor complex conjugati in semiplanul sting:

> $\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1])$;

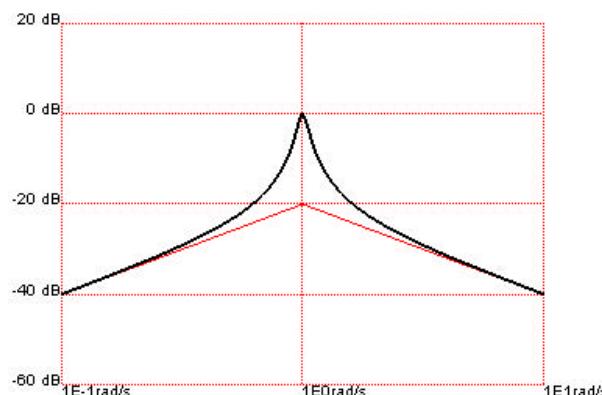
$$-.10 \frac{s}{s^2 + .10 s + 1}$$

> $\text{PZ}[\text{numeric}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]), s)$;

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0. \\ p_1 & -.05000 + .9987 I \\ p_2 & -.05000 - .9987 I \end{bmatrix}$$

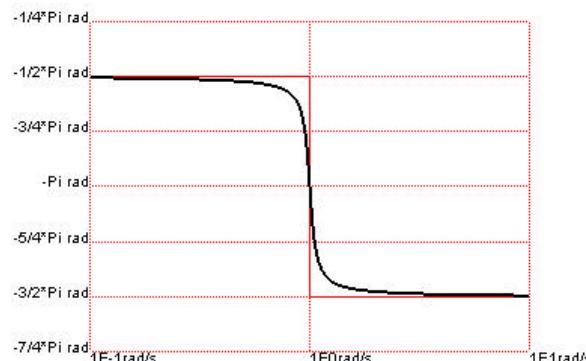
> $\text{Bode}[\text{castig}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]))$;

Diagrama Bode de castig



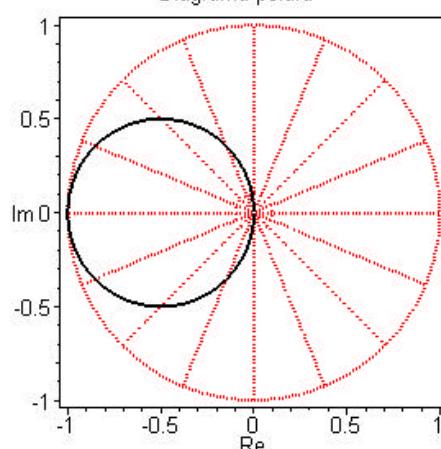
> $\text{Bode}[\text{faza}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]))$;

Diagrama Bode de faza



> $\text{Bode}[\text{polara}](\text{eval}(H, [\alpha_0 = -0.05, \omega_0 = 1]), \text{numarpuncte} = 1000)$;

Diagrama polară



Pol real dublu cu parte reala negativa

Pentru functie de transfer de ordin II in cazul unui pol real dublu in semiplanul sting:

> `eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]);`

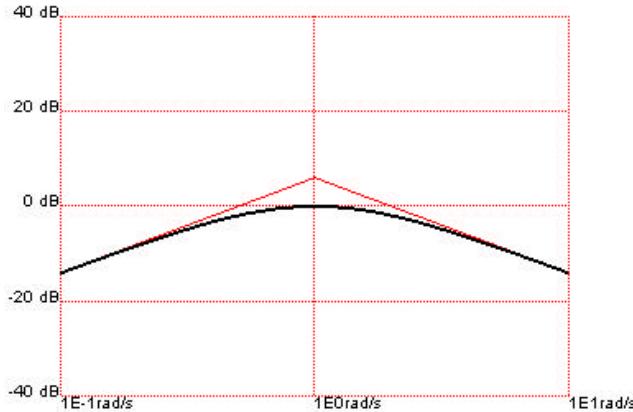
$$-2 \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

> `PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]),s);`

$$\begin{bmatrix} zI & 0. \\ pI & -1. \\ p2 & -1.000 \end{bmatrix}$$

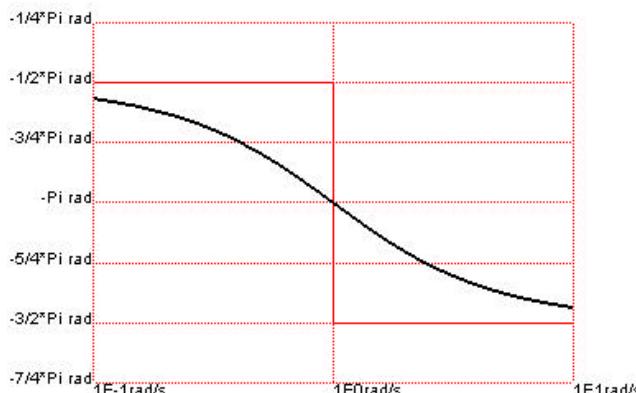
> `Bode[castig](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));`

Diagrama Bode de castig



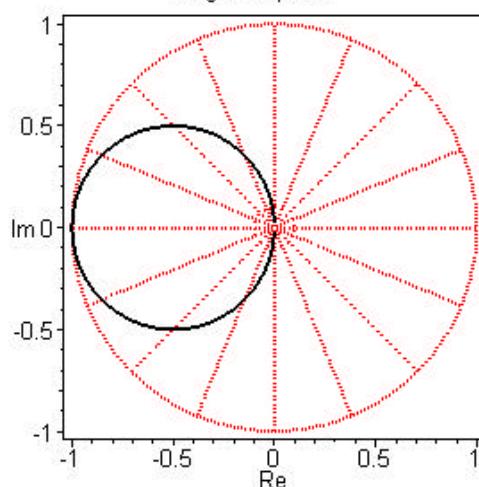
> `Bode[faza](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));`

Diagrama Bode de faza



> `Bode[polar](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));`

Diagrama polară



Poli reali distincti cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul unor poli distincti reali in semiplanul sting:

> eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]);

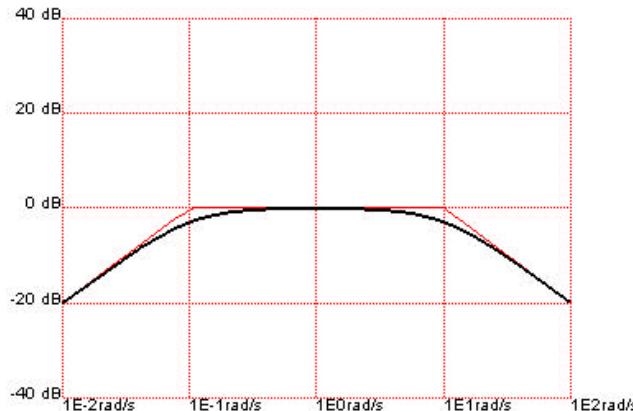
$$-10.10 \frac{s}{s^2 + 10.10 s + 1}$$

> PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),s);

$$\begin{bmatrix} zI & 0. \\ p1 & -1000 \\ p2 & -10.00 \end{bmatrix}$$

> Bode[castig](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]));

Diagrama Bode de castig



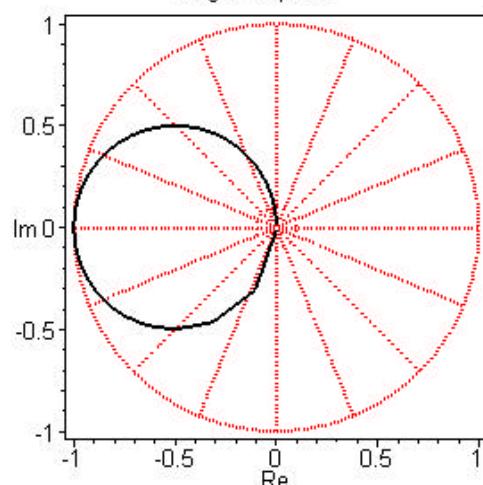
> Bode[faza](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),numarpuncte=1000);

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),numarpuncte=1000);

Diagrama polară



Filtru trece sus de ord. II

```
> H:=s^2/(s^2-2*alpha0*s+omega0^2);
```

$$H := \frac{s^2}{s^2 - 2\alpha_0 s + \omega_0^2}$$

Poli complex conjugati cu parte reala negativa

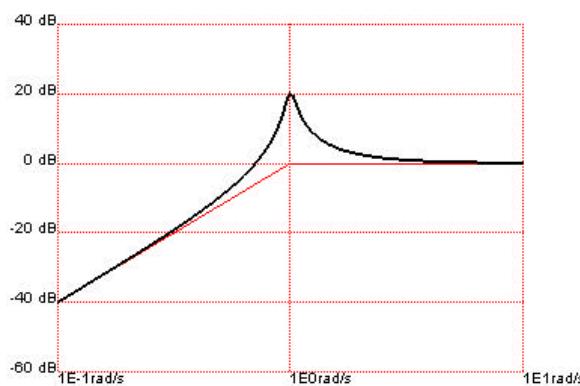
Pentru functia de transfer de ordin II in cazul polilor complex conjugati in semiplanul sting:

```
> eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]);
```

$$\begin{bmatrix} z1 & 0. \\ z2 & 0. \\ p1 & -.05000 + .9987I \\ p2 & -.05000 - .9987I \end{bmatrix}$$

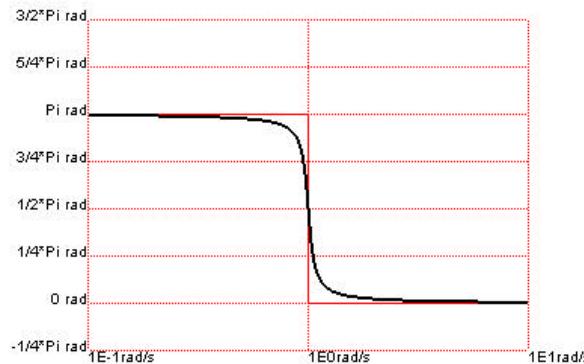
```
> Bode[castig](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]));
```

Diagrama Bode de castig



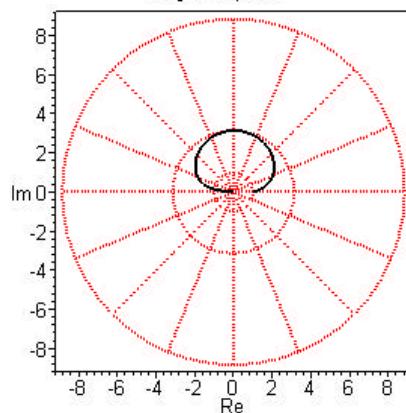
```
> Bode[faza](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]));
```

Diagrama Bode de faza



```
> Bode[polara](eval(H,[alpha0=-0.05,omega0=1]),numarpuncte=1000,compresie=[2,1]);
```

Diagrama polara



Pol real dublu cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul unui pol real dublu in semiplanul sting:

> eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]);

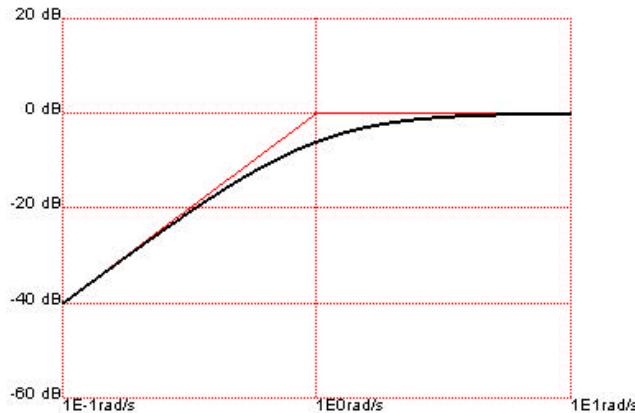
$$\frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}$$

> PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]),s);

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0. \\ z_2 & 0. \\ p_1 & -1. \\ p_2 & -1.000 \end{bmatrix}$$

> Bode[castig](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));

Diagrama Bode de castig



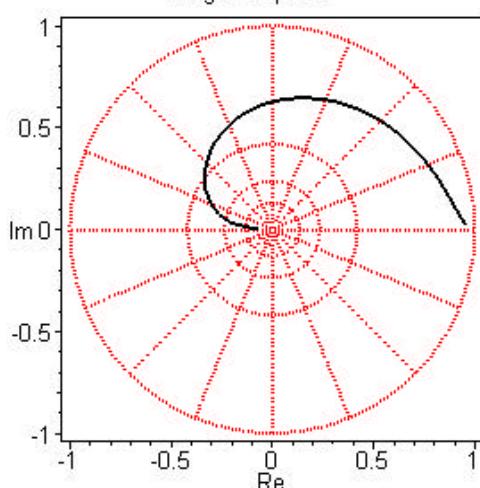
> Bode[faza](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,[alpha0=-1,omega0=1]),compresie=[4,1]);

Diagrama polară



Poli reali distincti cu parte reala negativa

Pentru functia de transfer de ordin II in cazul unor poli distincti reali in semiplanul sting:

> `eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]);`

$$\frac{s^2}{s^2 + 10.10 s + 1}$$

> `PZ[numeric](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),s);`

$$\begin{bmatrix} z1 & 0. \\ z2 & 0. \\ p1 & -1000 \\ p2 & -10.00 \end{bmatrix}$$

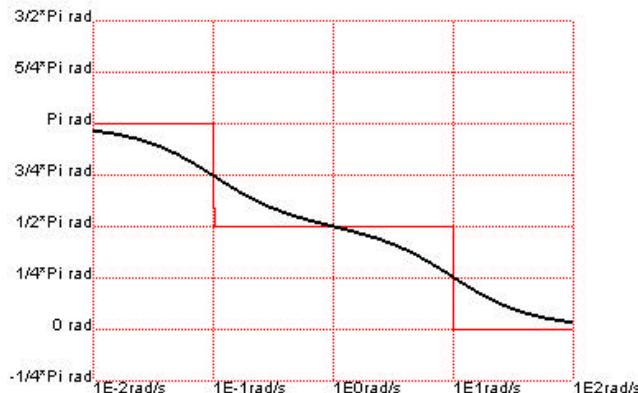
> `Bode[castig](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]));`

Diagrama Bode de castig



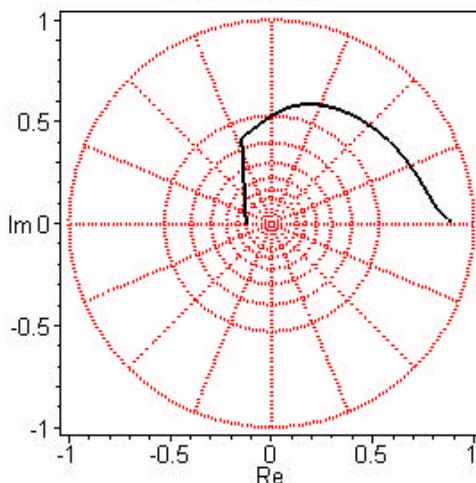
> `Bode[faza](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),numarpuncte=1000);`

Diagrama Bode de faza



> `Bode[polar](eval(H,[alpha0=-5.05,omega0=1]),compresie=[8,1],numarpuncte=1000);`

Diagrama polara



Filtru trece tot de ord. II

$$> H:=k*(s^2-2*\alpha_0*s+\omega_0^2)/(s^2+2*\alpha_0*s+\omega_0^2);$$

$$H := \frac{k(s^2 - 2\alpha_0 s + \omega_0^2)}{s^2 + 2\alpha_0 s + \omega_0^2}$$

> eval(H,[k=2,alpha0=5,omega0=100]);

$$2 \frac{s^2 - 10s + 10000}{s^2 + 10s + 10000}$$

> PZ[numeric](eval(H,[k=2,alpha0=5,omega0=100]),s);

$$\begin{bmatrix} z1 & 5. + 99.87I \\ z2 & 5.000 - 99.87I \\ p1 & -5. + 99.87I \\ p2 & -5.000 - 99.87I \end{bmatrix}$$

> PZ[grafic](eval(H,[k=2,alpha0=5,omega0=100]),s);

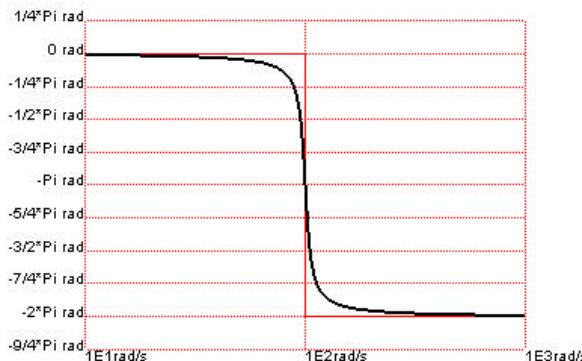
> Bode[castig](eval(H,[k=2,alpha0=5,omega0=100]));

Diagrama Bode de castig



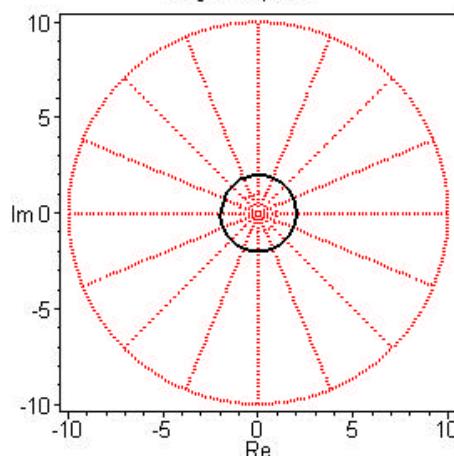
> Bode[faza](eval(H,[k=2,alpha0=5,omega0=100]));

Diagrama Bode de faza



> Bode[polar](eval(H,[k=2,alpha0=5,omega0=100]));

Diagrama polară



Exemplul III:

Ne propunem trasarea diagramele Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare pentru functia de transfer:

> **H:=(s+10)/(s^2+s+100);**

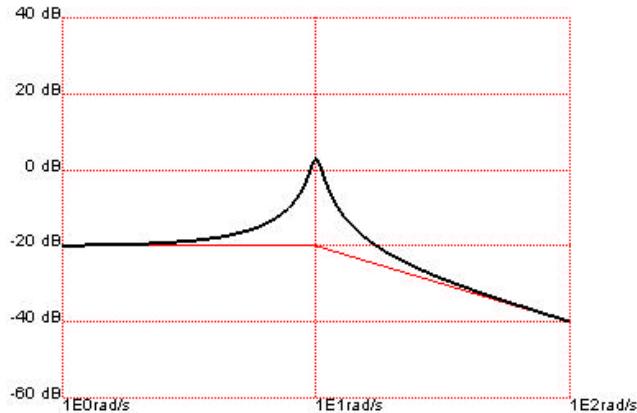
$$H := \frac{s + 10}{s^2 + s + 100}$$

> **PZ[numeric](H,s); PZ[grafic](H,s);**

$$\begin{bmatrix} zI & -10. \\ pI & -5000 + 9.987I \\ p2 & -5000 - 9.987I \end{bmatrix}$$

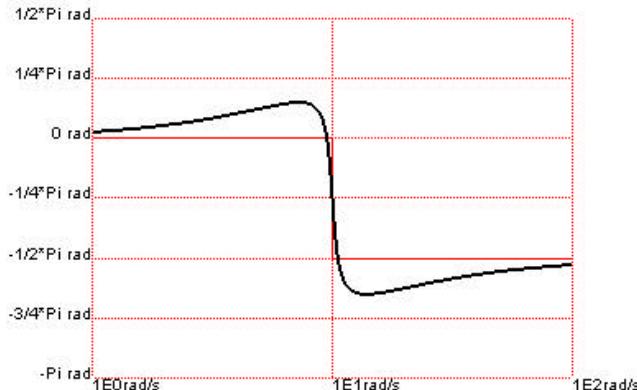
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



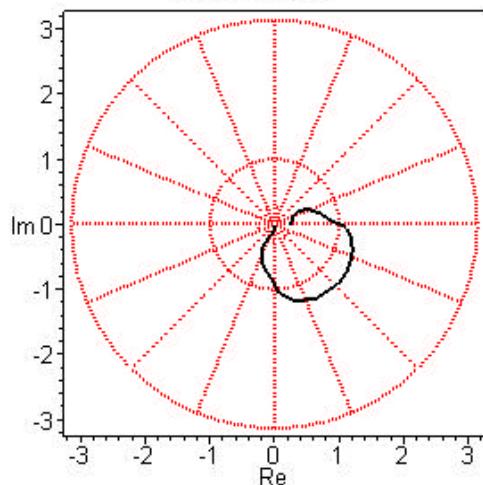
> **Bode[faza](H);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H,compresie=[2,1]);**

Diagrama polară



Probleme. Intrebari

Sa se reprezinte manual si sa se verifice cu ajutorul calculatorului diagramele Bode de castig si faza, precum si diagrama polară pentru functiile de transfer:

> **H:=1/s^2;**

$$H := \frac{1}{s^2}$$

> **H:=1/(s+10)^2;**

$$H := \frac{1}{(s + 10)^2}$$

> **H:=(s+10)^2/(s^2+10*s+100);**

$$H := \frac{(s + 10)^2}{s^2 + 10s + 100}$$

> **H:=s*(s+10)/(s^2+10*s+100);**

$$H := \frac{s(s + 10)}{s^2 + 10s + 100}$$

Trasarea diagramelor Bode si a diagramei polare

Partea a III-a: Functii de transfer ale unor sisteme de ordin superior

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Mod de lucru	1
Exemple	1
Exemplul I.....	1
Exemplul II.....	3
Exemplul III.....	5
Exemplul IV	9
Probleme. Intrebari.....	10

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru trasarea diagramelor Bode de castig si faza, precum si a diagramei polare:

- functia **Bode[castig]** [help](#)
- functia **Bode[faza]** [help](#)
- functia **Bode[polară]** [help](#)

Pentru calcularea si reprezentarea singularitatilor functiei de transfer:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)
- functia **PZ[grafic]** [help](#)

> **restart;**
> **libname:="..../SCSlab",libname:**

Exemple

Exemplul I

Trasarea trasarea diagramelor Bode pentru functia de transfer:

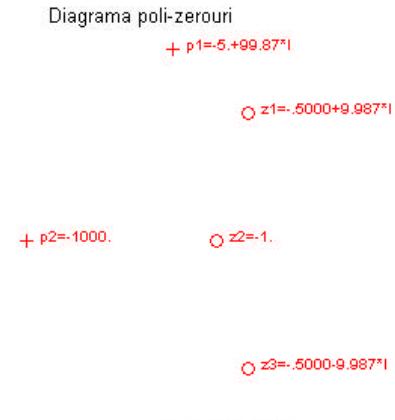
> **H:=(s+1)*(s^2+1*s+100)/(s^2+10*s+10000)/(s+1000);**
$$H := \frac{(s + 1) (s^2 + s + 100)}{(s^2 + 10 s + 10000) (s + 1000)}$$

> **PZ[numeric](H,s);**

$$\begin{bmatrix} z1 & -5000 + 9.987I \\ z2 & -1. \\ z3 & -5000 - 9.987I \\ p1 & -5. + 99.87I \\ p2 & -1000. \\ p3 & -5. - 99.87I \end{bmatrix}$$

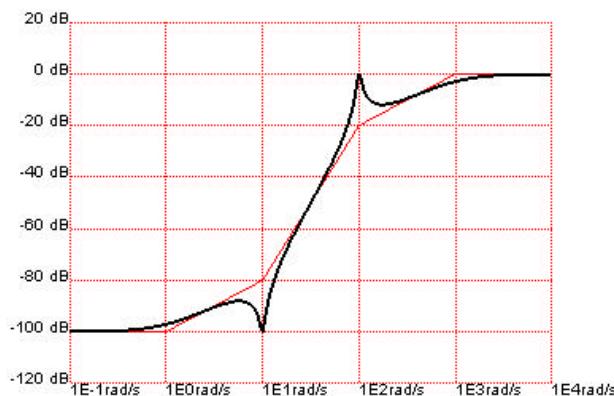
Trasarea diagramele Bode si a diagramei polare. Partea a III-a

> **PZ[grafic](H,s,compresie = true);**



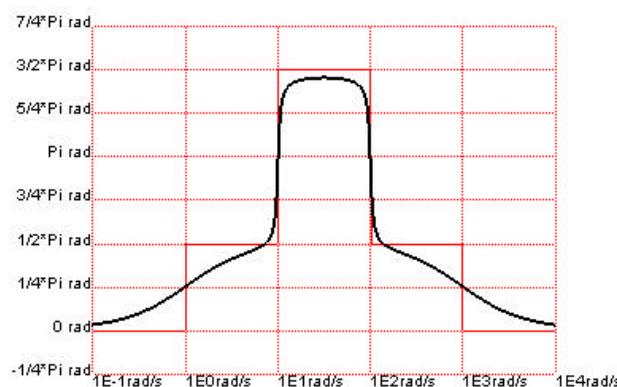
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



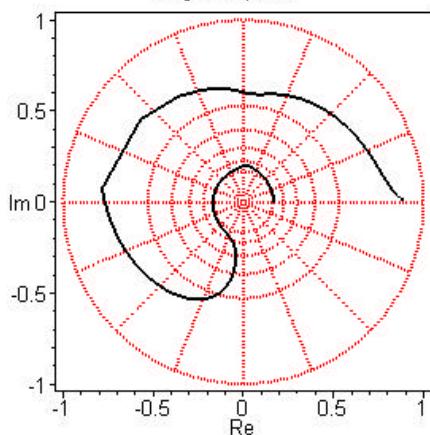
> **Bode[faza](H);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H,compresie=[8,1],numarpuncte=1000);**

Diagrama polară



Exemplul II

Trasarea diagramelor Bode pentru functia de transfer:

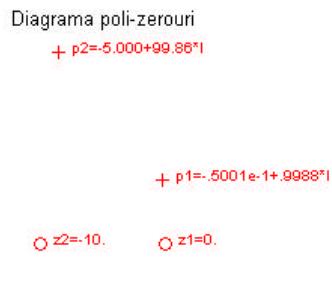
> **H:=10^3*s*(s+10)/((s^2+0.1*s+1)*(s^2+10*s+10^4));**

$$H := 1000 \frac{s(s+10)}{(s^2 + .1s + 1)(s^2 + 10s + 10000)}$$

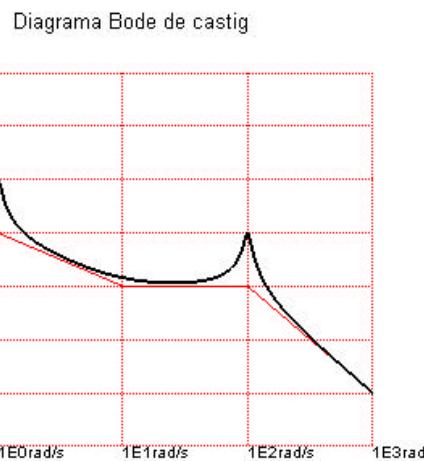
> **PZ[numeric](H,s);**

$$\begin{bmatrix} z1 & 0. \\ z2 & -10. \\ p1 & -0.05001 + .9988I \\ p2 & -5.000 + 99.86I \\ p3 & -0.05001 - .9988I \\ p4 & -5.000 - 99.86I \end{bmatrix}$$

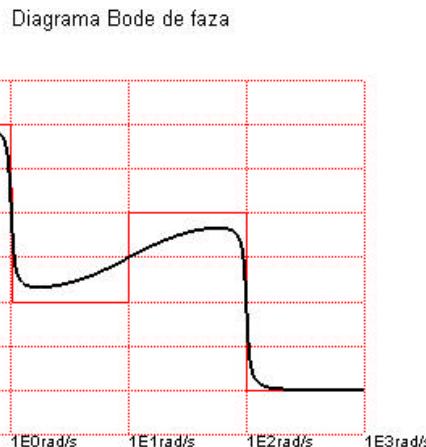
> **PZ[grafic](H,s,compresie = true);**



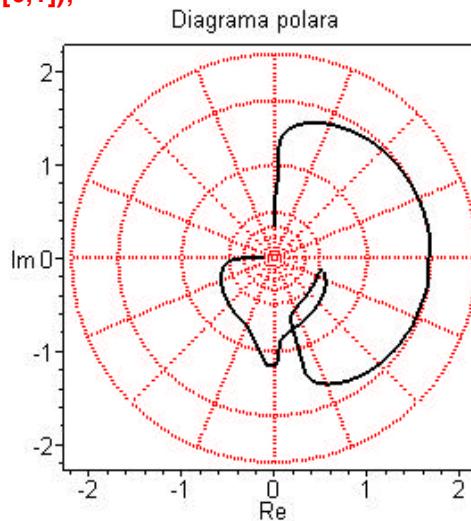
> **Bode[castig](H);**



> **Bode[faza](H);**



> **Bode[polar](H,compresie=[6,1]);**



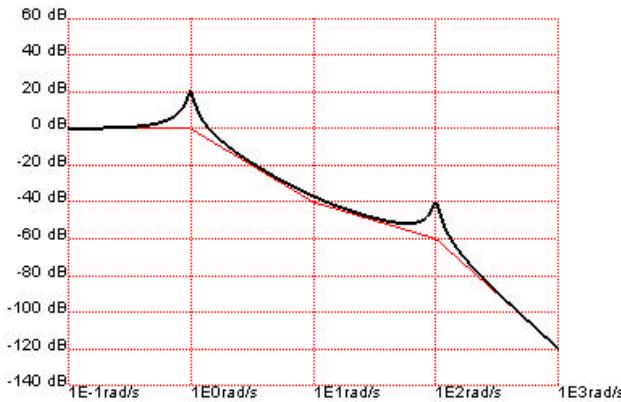
Comparativ, pentru functia de transfer fara zerou in origine diagramele Bode de modul si argument sunt:

> **H:=10^3*(s+10)/((s^2+0.1*s+1)*(s^2+10*s+10^4));**

$$H := 1000 \frac{s + 10}{(s^2 + .1 s + 1) (s^2 + 10 s + 10000)}$$

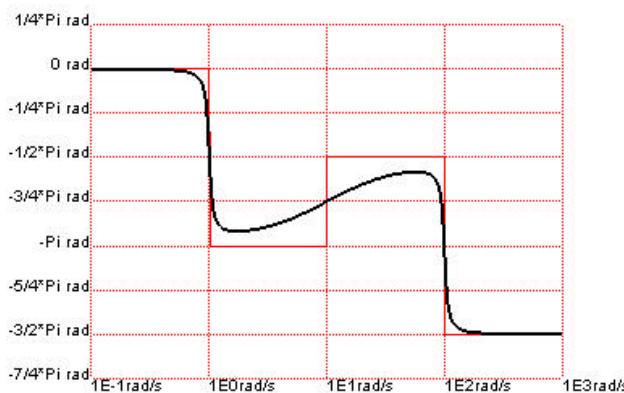
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



> **Bode[faza](H);**

Diagrama Bode de faza



Exemplul III

Trasarea diagramelor Bode pentru functia de transfer:

$$H := 10^3 * (s^2 + 0.1 * s + 1) / (s * (s + 10) * (s + 100));$$

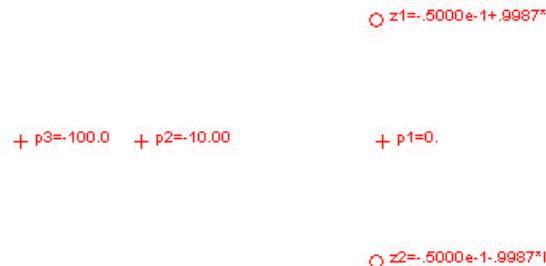
$$H := 1000 \frac{s^2 + .1 s + 1}{s (s + 10) (s + 100)}$$

> **PZ[numeric](H,s);**

$$\begin{bmatrix} z1 & -0.05000 + .9987I \\ z2 & -0.05000 - .9987I \\ p1 & 0. \\ p2 & -10.00 \\ p3 & -100.0 \end{bmatrix}$$

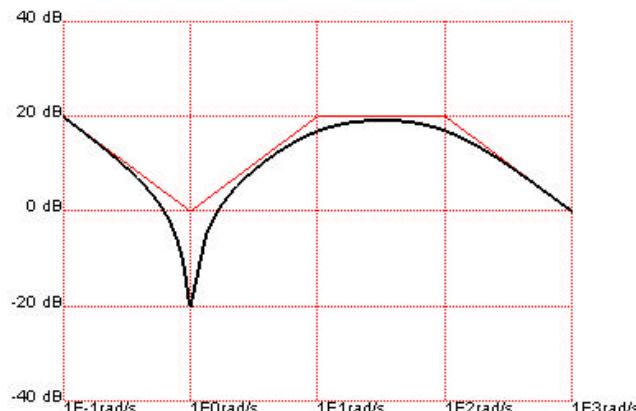
> **PZ[grafic](H,s,compresie = true);**

Diagrama poli-zerouri



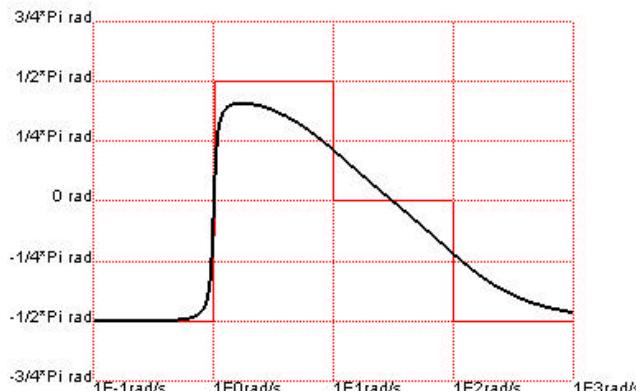
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



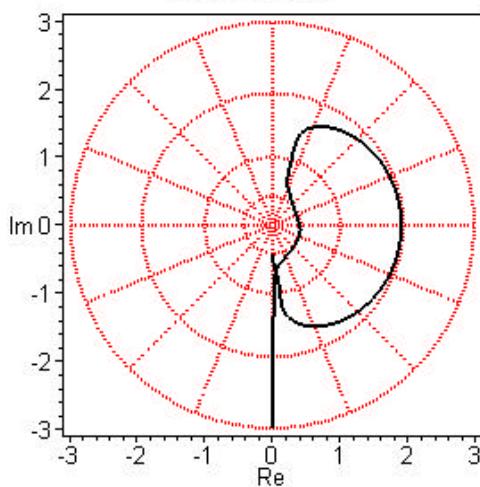
> **Bode[faza](H,numarpuncte=1000);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H,compresie=[4,1],numarpuncte=1000);**

Diagrama polară



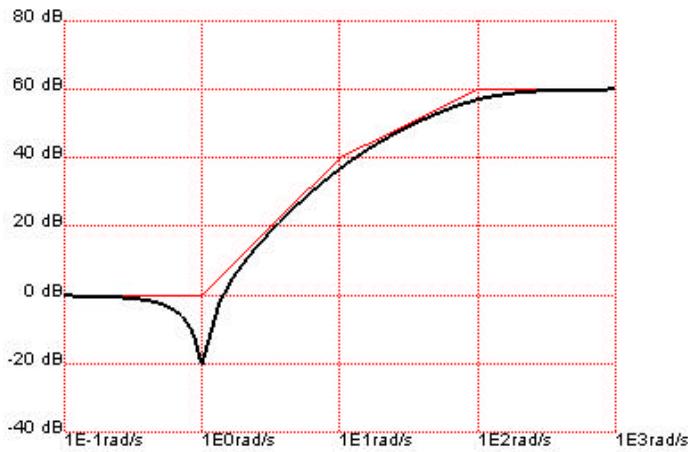
1. Comparativ, pentru functia de transfer fara pol in origine diagramele Bode de modul si argument sunt:

> **H:=10^3*(s^2+0.1*s+1)/((s+10)*(s+100));**

$$H := 1000 \frac{s^2 + .1 s + 1}{(s + 10)(s + 100)}$$

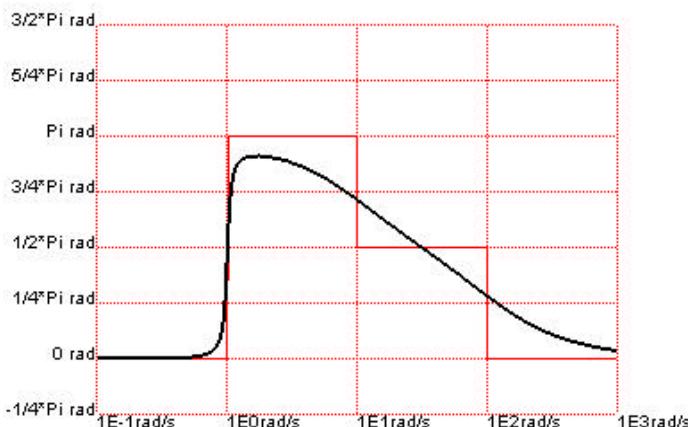
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



> **Bode[faza](H,numarpuncte = 1000);**

Diagrama Bode de faza



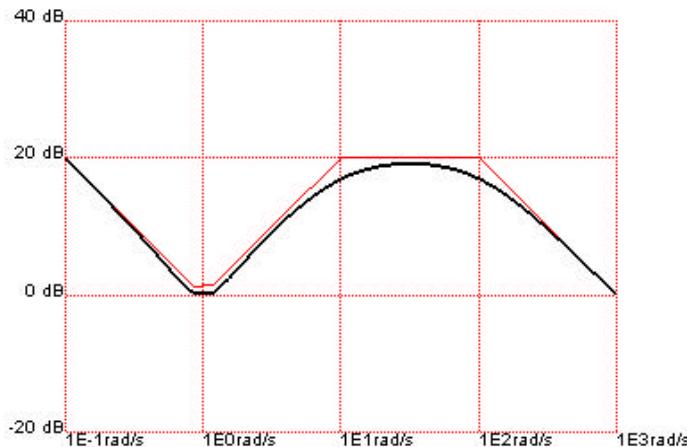
2. Modificind cistigul termenului de ordin II si pastrind pol in origine diagramele Bode de modul si argument sunt:

> **H:=10^3*(s^2+s+1)/(s*(s+10)*(s+100));**

$$H := 1000 \frac{s^2 + s + 1}{s (s + 10) (s + 100)}$$

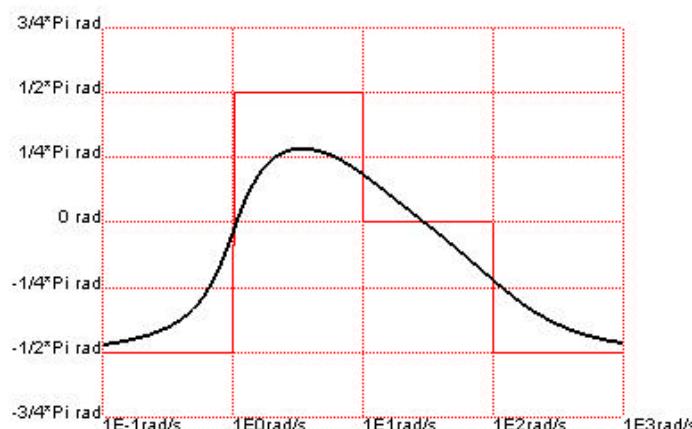
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



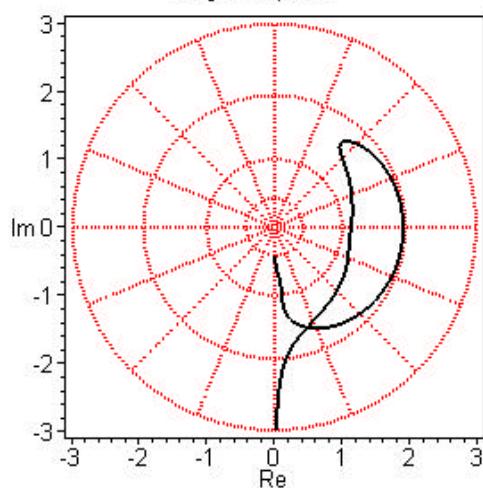
> **Bode[faza](H,numarpuncte=1000);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H,compresie=[4,1],numarpuncte=1000);**

Diagrama polară



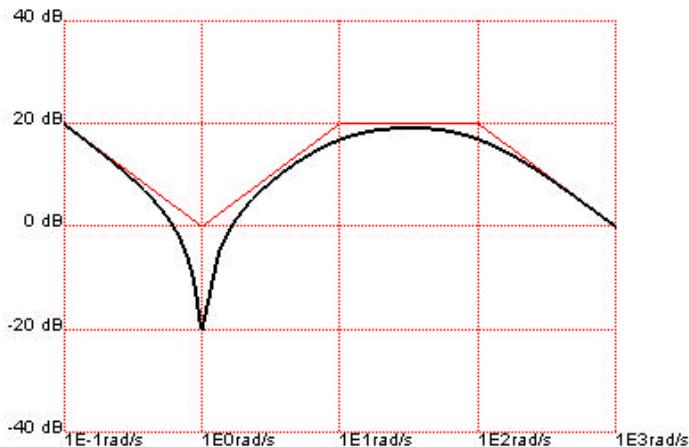
3. Trecind zerourile complex conjugate din semiplanul sting in semiplanul drept si pastrind pol in origine diagramele Bode de modul si argument sunt:

$$> H:=10^3*(s^2-0.1*s+1)/(s*(s+10)*(s+100));$$

$$H := 1000 \frac{s^2 - .1 s + 1}{s (s + 10) (s + 100)}$$

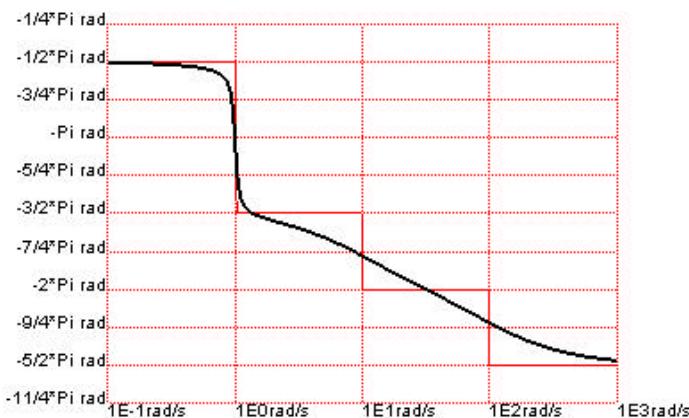
> **Bode[castig](H);**

Diagrama Bode de castig



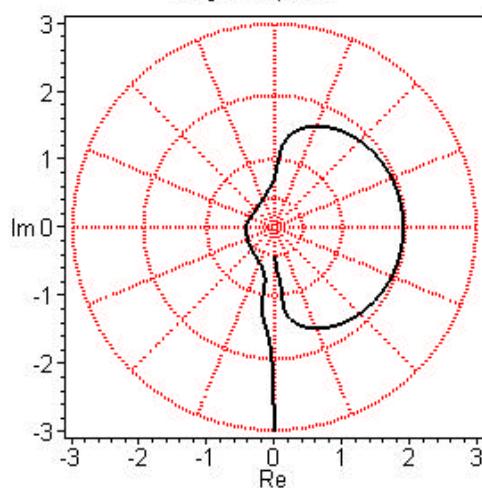
> **Bode[faza](H,numarpuncte=1000);**

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H,compresie=[4,1],numarpuncte=1000);**

Diagrama polară



Exemplul IV

```
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));
```

$$H := \frac{s^2 (s + 100)}{(s + 1) (s^2 + s + 100) (s + 1000)}$$

```
> PZ[numeric](H,s);
```

$$\begin{bmatrix} z1 & 0. \\ z2 & 0. \\ z3 & -100. \\ p1 & -5000 + 9.987 I \\ p2 & -1. \\ p3 & -1000. \\ p4 & -5000 - 9.987 I \end{bmatrix}$$

```
> PZ[grafic](H,s,compresie=true);
```

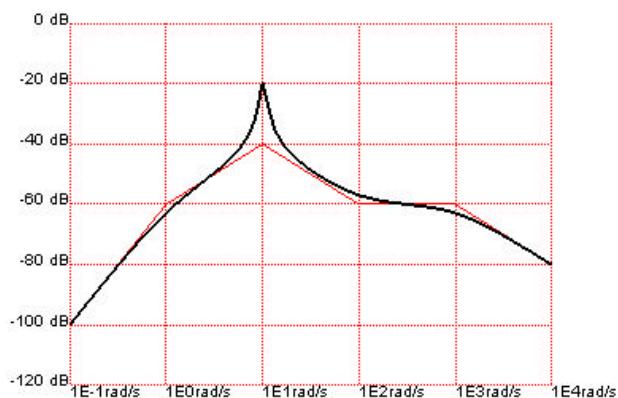
Diagrama poli-zerouri
+ p1=-.5000+9.987*I

+ p3=-1000. ○ z3=-100. + p2=-1. ○ z2=0.

+ p4=-.5000-9.987*I

```
> Bode[castig](H);
```

Diagrama Bode de castig



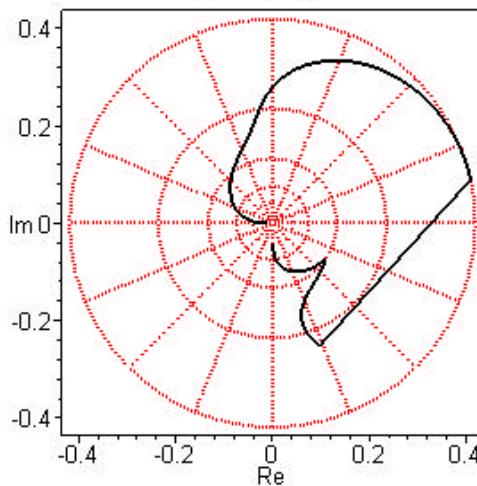
```
> Bode[faza](H,numarpuncte=1000);
```

Diagrama Bode de faza



> **Bode[polar](H,numarpuncte=1000,compresie=[4,1]);**

Diagrama polară



Probleme. Intrebări

Sa se reprezinte manual si sa se verifice cu ajutorul calculatorului diagramele Bode de castig si faza, precum si diagrama polara pentru functiile de transfer:

> **H:=s/(s+100)/(s+1000);**

$$H := \frac{s}{(s + 100)(s + 1000)}$$

> **H:=(s^2+s+100)/s/(s+100)/(s+1000);**

$$H := \frac{s^2 + s + 100}{s(s + 100)(s + 1000)}$$

> **H:=s*(s+100)/(s^2+s+100)/(s+1000);**

$$H := \frac{s(s + 100)}{(s^2 + s + 100)(s + 1000)}$$

> **H:=(s+100)/s*(s^2+s+100)/(s+1000);**

$$H := \frac{(s + 100)(s^2 + s + 100)}{s(s + 1000)}$$

> **H:=-s^3*(s^2+10*s+10000)/((s^2+s+100)*(s+1));**

$$H := -\frac{s^3(s^2 + 10s + 10000)}{(s^2 + s + 100)(s + 1)}$$

> **H:=(s+1)*(s^2+10*s+100)/(s^2+100*s+10000)^2;**

$$H := \frac{(s + 1)(s^2 + 10s + 100)}{(s^2 + 100s + 10000)^2}$$

> **H:=(s^2+0.1*s+1)/(s^2+1);**

$$H := \frac{s^2 + .1s + 1}{s^2 + 1}$$

Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	1
Exemple	2
Filtre de ordinul I.....	2
Filtre de ordinul I trece jos	2
Raspunsul la semnal treapta.....	2
Raspunsul la puls dreptunghiular.....	2
Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare.....	3
Filtre de ordinul I trece sus	4
Raspunsul la semnal treapta.....	4
Raspunsul la puls dreptunghiular.....	4
Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare.....	5
Filtre de ordinul II.....	5
Filtre de ordinul II trece jos	5
Raspunsul la semnal treapta.....	5
Raspunsul la puls dreptunghiular.....	6
Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare.....	7
Filtre de ordinul II trece banda.....	7
Raspunsul la semnal treapta.....	7
Raspunsul la puls dreptunghiular.....	8
Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare.....	9
Filtre de ordinul II trece sus	9
Raspunsul la semnal treapta.....	9
Raspunsul la puls dreptunghiular.....	10
Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare.....	11
Probleme. Intrebari.....	11

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Determinarea raspunsului de regim tranzitoriu al unor sisteme de ordinul I si II la diferite tipuri de semnale.

Rezumat teoretic:

Consideram un circuit liniar pentru care presupunem ca s-a determinat functia de transfer $H(s)$ cu excitatia $e(t)$ si raspunsul $y(t)$ (de exemplu, utilizand metoda tensiunilor nodale) si ne propunem sa calculam raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$. In situatia in care semnalele $e(t)$ si $y(t)$ sunt cauzale, circuitul functioneaza in regim tranzitoriu si pentru studiul comportarii de regim tranzitoriu se utilizeaza *transformata Laplace*. Vom nota cu $Y(s)$ transformata Laplace a semnalului $y(t)$ si cu $E(s)$ transformata Laplace a semnalului excitatiei $e(t)$. Metodologia de calcul a raspunsului $y(t)$ la excitatia $e(t)$ pentru un circuit este urmatoarea:

- Determinarea lui $E(s)$ din $e(t)$, folosind *transformata Laplace directa*.
- Determinarea lui $Y(s)$, folosind relatia $Y(s) = H(s)E(s)$.
- Determinarea lui $y(t)$ din $Y(s)$, folosind *transformata Laplace inversa*.

Mod de lucru

Pachetul de functii cel mai utilizat in aceasta lucrare este *intrans*.

> **restart**:

```
> L:=table([dir=inttrans[laplace],inv=inttrans[invlaplace]]):
> assume(_alpha,positive):assume(_omega,positive):assume(_tau,positive):assume(_T,positive):
> N:=5:
```

Exemple

In cele ce urmeaza ne propunem sa determinam raspunsul de regim periodic al unor circuite relativ simple (de ordinul I si II) la cateva tipuri de excitatii particulare (semnal treapta, puls dreptunghiular, succesiune de pulsuri dreptunghiulare).

Filtre de ordinul I

Filtre de ordinul I trece jos

In acest caz functia de transfer a circuitului este:

```
> H:=alpha/(s+alpha);
```

$$H := \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

Raspunsul la semnal treapta

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

```
> e:=A0*Heaviside(t);
```

$$e := A0 \text{Heaviside}(t)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

```
> E:=L[dir](e,t,s);
```

$$E := \frac{A0}{s}$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

```
> Y:=H*E;
```

$$Y := \frac{\alpha A0}{(s + \alpha) s}$$

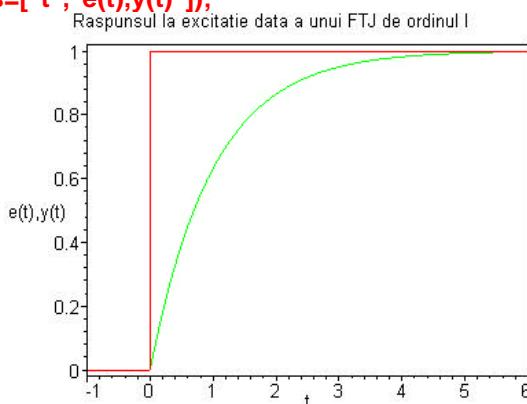
- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

```
> y:=L[inv](Y,s,t)*Heaviside(t);
```

$$y := \alpha A0 \left(-\frac{e^{(-\alpha t)}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \text{Heaviside}(t)$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1]),t=-1..6,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul I",labels=[ "t" , "e(t),y(t)" ]);
```



Raspunsul la puls dreptunghiular

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

```
> e:=A0*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));
```

$$e := A0 (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

```
> E:=subs(_tau=tau,L[dir](subs(tau=_tau,e),t,s));
```

$$E := A_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> $Y := H^* E;$

$$Y := \frac{\alpha A_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)}{s + \alpha}$$

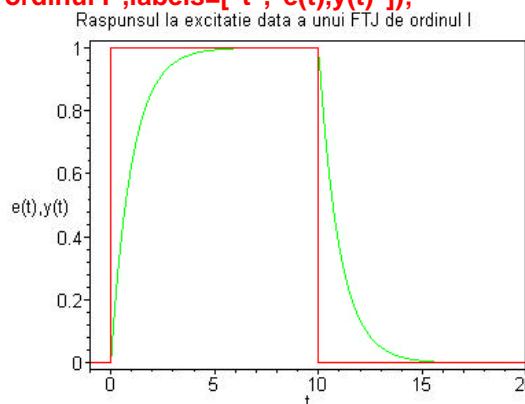
- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> $y := L[\text{inv}](Y, s, t) * \text{Heaviside}(t);$

$$y := \alpha A_0 \left(\frac{(e^{(\alpha(-t+\tau))} - 1) \text{Heaviside}(t-\tau)}{\alpha} - \frac{e^{(-\alpha t)} - 1}{\alpha} \right) \text{Heaviside}(t)$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> $\text{plot}(\text{eval}([e, y], [A_0=1, \alpha=1, \tau=10]), t=-1..20, \text{thickness}=1, \text{axes}=\text{box}, \text{title}=\text{"Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul I"}, \text{labels}=[\text{"t"}, \text{"e(t), y(t)"}]);$



Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

> $e := A_0 * \sum(\text{Heaviside}(t-n*T) - \text{Heaviside}(t-tau-n*T), n=0..N-1);$

- Transformata Laplace a excitatii $e(t)$ este:

> $E := \text{subs}([\underline{\tau}=\tau, \underline{T}=T], L[\text{dir}](\text{subs}([T=\underline{T}, tau=\underline{\tau}], e), t, s));$

- Transformata Laplace a excitatii $y(t)$ este:

> $Y := H^* E;$

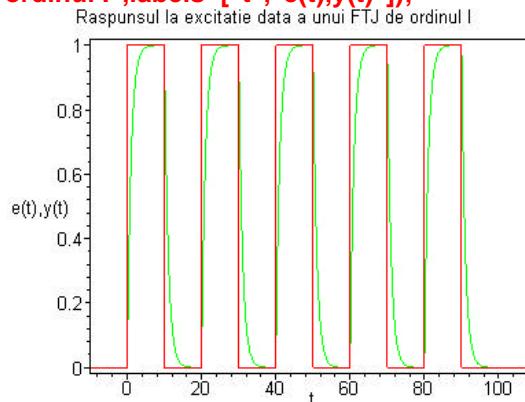
- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

> $y := \text{subs}([\underline{\tau}=\tau, \underline{T}=T, \underline{\alpha}=\alpha], L[\text{inv}](\text{subs}([T=\underline{T}, tau=\underline{\tau}, alpha=\underline{\alpha}], Y), s, t)) * \text{Heaviside}(t);$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> $\text{plot}(\text{eval}([e, y], [A_0=1, \alpha=1, \tau=10, T=20]), t=-10..110, \text{thickness}=1, \text{axes}=\text{box}, \text{title}=\text{"Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul I"}, \text{labels}=[\text{"t"}, \text{"e(t), y(t)"}]);$



Filtre de ordinul I trece sus

In acest caz functia de transfer a circuitului este:

> **H:=s/(s+alpha);**

$$H := \frac{s}{s + \alpha}$$

Raspunsul la semnal treapta

In acest caz expresia excitatia $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*Heaviside(t);**

$$e := A0 \text{ Heaviside}(t)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=L[dir](e,t,s);**

$$E := \frac{A0}{s}$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{A0}{s + \alpha}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

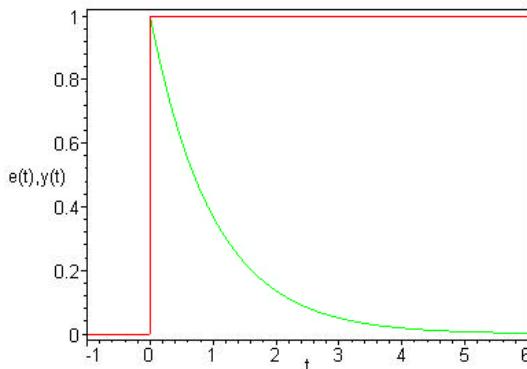
> **y:=L[inv](Y,s,t)*Heaviside(t);**

$$y := A0 e^{(-\alpha t)} \text{ Heaviside}(t)$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

> **plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1]),t=-1..6,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul I",labels=[["t","e(t),y(t)"]];**

Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul I



Raspunsul la puls dreptunghiular

In acest caz expresia excitatia $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));**

$$e := A0 (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=subs(_tau=tau,L[dir](subs(tau=_tau,e),t,s));**

$$E := A0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{s A0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)}{s + \alpha}$$

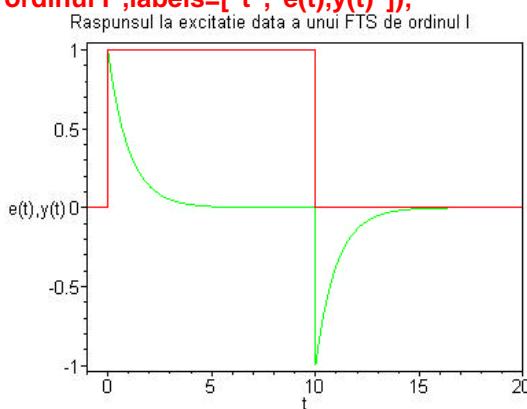
- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> **y:=L[inv](Y,s,t)*Heaviside(t);**

$$y := A0 (-e^{(\alpha(-t+\tau))} \text{ Heaviside}(t - \tau) + e^{(-\alpha t)}) \text{ Heaviside}(t)$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> `plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,tau=10]),t=-1..20,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul I",labels=["t","e(t),y(t)"]);`



Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

> `e:=A0*sum(Heaviside(t-n*T)-Heaviside(t-tau-n*T),n=0..N-1);`

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> `E:=subs({_tau=tau,_T=T},L[dir](subs([T=_T,tau=_tau],e),t,s));`

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> `Y:=H*E;`

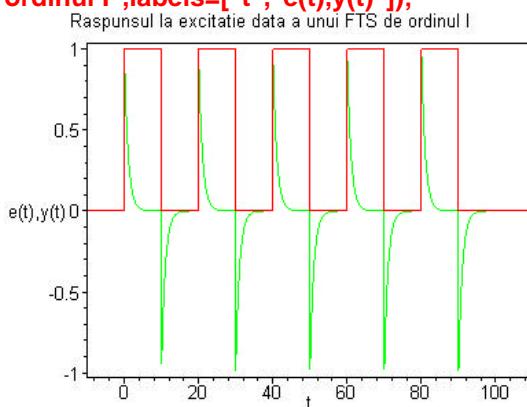
- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

> `y:=subs({_tau=tau,_T=T,_alpha=alpha},L[inv](subs([T=_T,tau=_tau,alpha=_alpha],Y),s,t))*Heaviside(t);`

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> `plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,tau=10,T=20]),t=-10..110,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul I",labels=["t","e(t),y(t)"]);`



Filtre de ordinul II

Vom discuta despre filtre de ordinul cu poli complex conjugati.

Filtre de ordinul II trece jos

In acest caz functia de transfer este:

> `H:=omega^2/((s+alpha-l*omega)*(s+alpha+l*omega));`

$$H := \frac{\omega^2}{(s + \alpha - l\omega)(s + \alpha + l\omega)}$$

Raspunsul la semnal treapta

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

> `e:=A0*Heaviside(t);`

$$e := A_0 \text{Heaviside}(t)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare

> **E:=L[dir](e,t,s);**

$$E := \frac{AO}{s}$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{\omega^2 AO}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)s}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

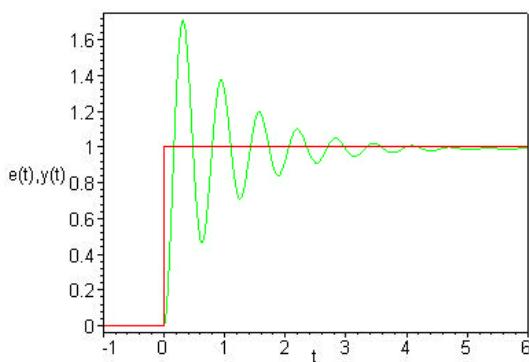
y:=simplify(normal(subs({_alpha=alpha,_omega=omega},L[inv](subs([alpha=_alpha,omega=_omega],Y),s,t)),expanded))*Heaviside(t);

$$y := -\frac{AO\omega(\cos(\omega t)\omega + \sin(\omega t)\alpha - \omega e^{(\alpha t)})e^{(-\alpha t)}\text{Heaviside}(t)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $AO = 1$ si $\alpha = 1$.

> **plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,omega=10,tau=10]),t=-1..6,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul II",labels=[["t","e(t),y(t)"]);**

Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul II



Raspunsul la puls dreptunghiular

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));**

$$e := A0 (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=subs(_tau=tau,L[dir](subs(tau=_tau,e),t,s));**

$$E := A0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{\omega^2 AO \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

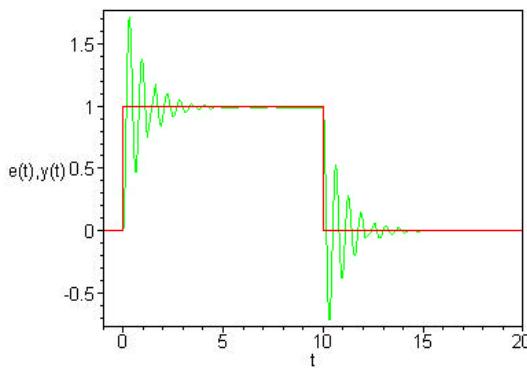
y:=subs({_alpha=alpha,_omega=omega,_tau=tau},simplify(normal(L[inv](subs([alpha=_alpha,omega=_omega,tau=_tau],Y),s,t),expanded)))*Heaviside(t);

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $AO = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> **plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,omega=10,tau=10]),t=**

1..20,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul II",labels=[["t","e(t),y(t)"]];

Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul II



Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> $e := A0 * \text{sum}(\text{Heaviside}(t-n*T)-\text{Heaviside}(t-\tau-n*T), n=0..N-1)$:

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> $E := \text{subs}([\tau=\tau, T=T], L[\text{dir}](\text{subs}([T=T, \tau=\tau], e), t, s))$:

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> $Y := \text{simplify}(\text{normal}(H^*E))$:

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

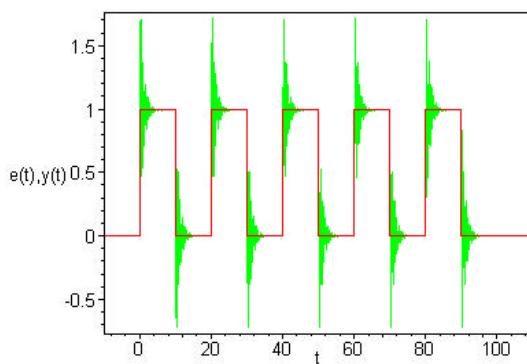
>

$y := \text{subs}([\tau=\tau, T=T, \alpha=\alpha, \omega=\omega], \text{normal}(L[\text{inv}](\text{subs}([\tau=\tau, T=T, \alpha=\alpha, \omega=\omega], Y), s, t), \text{expanded})) * \text{Heaviside}(t)$:

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> $\text{plot}(\text{eval}([e, y], [A0=1, \alpha=1, \omega=10, \tau=10, T=20]), t=10..110, \text{numpoints}=1000, \text{thickness}=1, \text{axes}=box, \text{title}="Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul II", \text{labels}=[\text{"t"}, \text{"e(t),y(t)"}])$;

Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul II



Filtre de ordinul II trece banda

In acest caz functia de transfer este:

> $H := 2 * \alpha * s / ((s + \alpha - I * \omega) * (s + \alpha + I * \omega))$;

$$H := 2 \frac{\alpha s}{(s + \alpha - I \omega)(s + \alpha + I \omega)}$$

Raspunsul la semnal treapta

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> $e := A0 * \text{Heaviside}(t)$;

$$e := A0 \text{ Heaviside}(t)$$

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> $E := L[\text{dir}](e, t, s)$;

$$E := \frac{A0}{s}$$

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> $Y := H * E$;

Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare

$$Y := 2 \frac{\alpha A_0}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

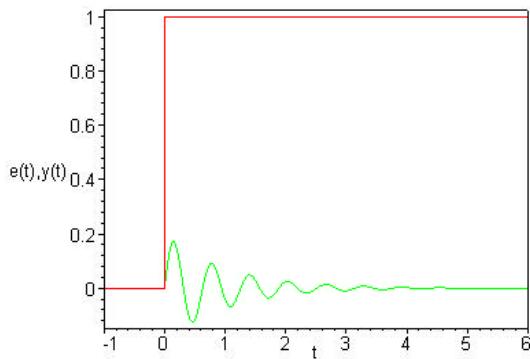
```
y:=subs({_alpha=alpha,_omega=omega},simplify(L[inv](subs([alpha=_alpha,omega=_omega],Y),s,t)))*Heaviside(t);
```

$$y := 2 \frac{\alpha A_0 e^{(-\alpha t)} \sin(\omega t) \text{Heaviside}(t)}{\omega}$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,omega=10]),t=-1..6,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTB de ordinul II",labels=["t","e(t),y(t)]);
```

Raspunsul la excitatie data a unui FTB de ordinul II



Raspunsul la puls dreptunghiular

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

```
> e:=A0*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));
```

$$e := A_0 (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

- Transformata Laplace a excitatii $e(t)$ este:

```
> E:=subs(_tau=tau,L[dir](subs(tau=_tau,e),t,s));
```

$$E := A_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)$$

- Transformata Laplace a excitatii $y(t)$ este:

```
> Y:=H*E;
```

$$Y := 2 \frac{\alpha s A_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

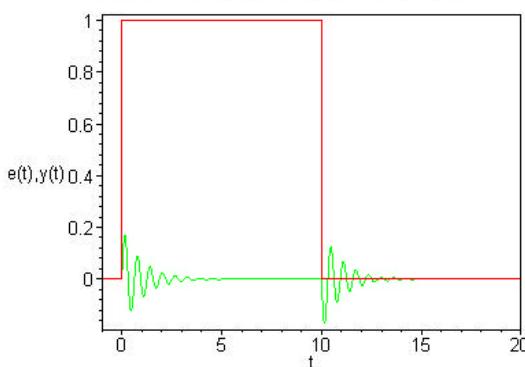
```
y:=subs({_alpha=alpha,_omega=omega,_tau=tau},simplify(L[inv](subs([alpha=_alpha,omega=_omega,tau=_tau],Y),s,t)))*Heaviside(t);
```

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

```
> plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,omega=10,tau=1]),t=
```

```
1..20,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTB de ordinul II",labels=["t","e(t),y(t)"]);
```

Raspunsul la excitatie data a unui FTB de ordinul II



Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

> $e := A0 * \text{sum}(\text{Heaviside}(t-n*T) - \text{Heaviside}(t-\tau-n*T), n=0..N-1)$:

- Transformata Laplace a excitatii $e(t)$ este:

> $E := \text{subs}([\tau = \tau, T = T], L[\text{dir}](\text{subs}([T = T, \tau = \tau], e), t, s))$:

- Transformata Laplace a excitatii $y(t)$ este:

> $Y := \text{simplify}(H^*E)$:

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

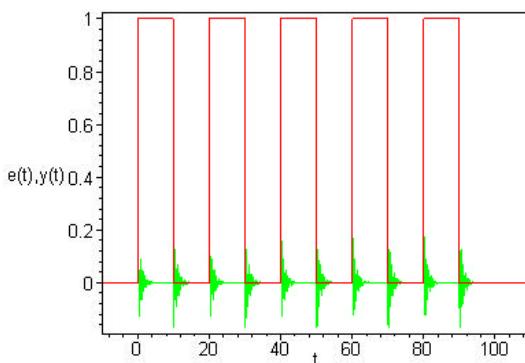
>

$y := \text{subs}([\tau = \tau, T = T, \alpha = \alpha, \omega = \omega], \text{normal}(L[\text{inv}](\text{subs}([T = T, \tau = \tau, \alpha = \alpha, \omega = \omega], Y), s, t), \text{expanded})) * \text{Heaviside}(t)$:

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> $\text{plot}(\text{eval}([e, y], [A0=1, \alpha=1, \omega=10, \tau=10, T=20]), t = 10..110, \text{numpoints}=2000, \text{thickness}=1, \text{axes}=box, \text{title}=\text{"Raspunsul la excitatie data a unui FTB de ordinul II"}, \text{labels}=[\text{"t"}, \text{"e(t),y(t)"}])$:

Raspunsul la excitatie data a unui FTB de ordinul II



Filtre de ordinul II trece sus

In acest caz functia de transfer este:

> $H := s^2 / ((s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega))$;

$$H := \frac{s^2}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)}$$

Raspunsul la semnal treapta

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

> $e := A0 * \text{Heaviside}(t)$;

$$e := A0 \text{ Heaviside}(t)$$

- Transformata Laplace a excitatii $e(t)$ este:

> $E := L[\text{dir}](e, t, s)$;

$$E := \frac{A0}{s}$$

- Transformata Laplace a excitatii $y(t)$ este:

> $Y := H^*E$;

Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare

$$Y := \frac{s A_0}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

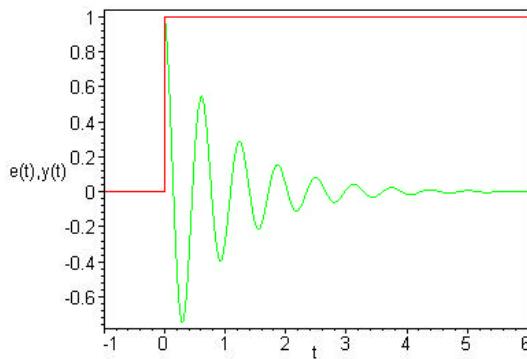
```
y:=subs({_alpha=alpha,_omega=omega},simplify(L[inv](subs([alpha=_alpha,omega=_omega],Y),s,t)))^Heaviside(t);
```

$$y := \frac{A_0 e^{(-\alpha t)} (-\alpha \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) \text{Heaviside}(t)}{\omega}$$

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,omega=10]),t=-1..6,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul II",labels=["t","e(t),y(t)];
```

Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul II



Raspunsul la puls dreptunghiular

In acest caz expresia excitatii $e(t)$ este de forma:

```
> e:=A0*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));
```

$$e := A_0 (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

- Transformata Laplace a excitatii $e(t)$ este:

```
> E:=subs(_tau=tau,L[dir](subs(tau=_tau,e),t,s));
```

$$E := A_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)$$

- Transformata Laplace a excitatii $y(t)$ este:

```
> Y:=H*E;
```

$$Y := \frac{s^2 A_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{(-s\tau)}}{s} \right)}{(s + \alpha - I\omega)(s + \alpha + I\omega)}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

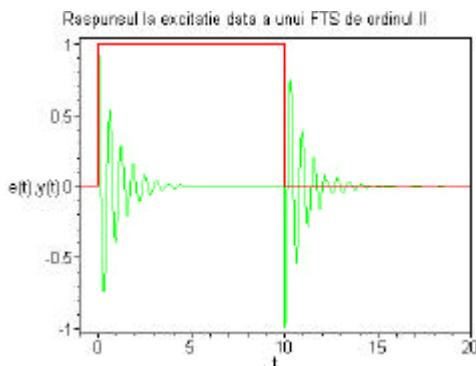
```
y:=subs({_alpha=alpha,_omega=omega,_tau=tau},simplify(L[inv](subs([alpha=_alpha,omega=_omega,tau=_tau],Y),s,t)))^Heaviside(t);
```

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A_0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

```
> plot(eval([e, y],[A0=1,alpha=1,omega=10,tau=1]),t=
```

```
1..20,thickness=1,axes=box,title="Raspunsul la excitatie data a unui FTS de ordinul
```

```
II",labels=["t","e(t),y(t)];
```

**Raspunsul la succesiune de pulsuri dreptunghiulare**

In acest caz expresia excitatia $e(t)$ este de forma:

> $e := A0 * \text{sum}(\text{Heaviside}(t-n*T)-\text{Heaviside}(t-\tau-n*T), n=0..N-1)$:

- Transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ este:

> $E := \text{subs}([\tau=\tau, T=T], L[\text{dir}](\text{subs}([T=T, \tau=\tau], e), t, s))$:

- Transformata Laplace a excitatiei $y(t)$ este:

> $Y := \text{simplify}(H*E)$:

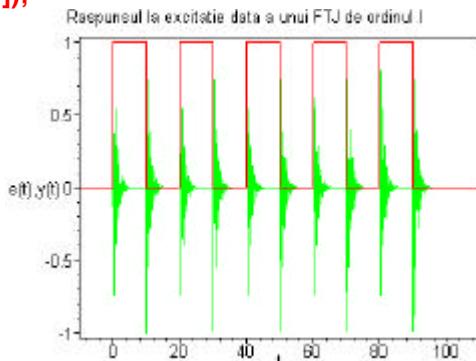
- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

>

$y := \text{subs}([\tau=\tau, T=T, \alpha=\alpha, \omega=\omega], \text{normal}(L[\text{inv}](\text{subs}([T=T, \tau=\tau, \alpha=\alpha, \omega=\omega], Y), s, t), \text{expanded})) * \text{Heaviside}(t)$:

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$, $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

> $\text{plot}(\text{eval}([e, y], [A0=1, \alpha=1, \omega=10, \tau=10, T=20]), t=0..110, \text{numpoints}=1000, \text{thickness}=1, \text{axes}=box, \text{title}="Raspunsul la excitatie data a unui FTJ de ordinul I", \text{labels}=[\text{"t"}, \text{"e(t)"}, \text{"y(t)"}])$;

**Probleme. Intrebari**

1. Descrieti metoda de calcul pentru determinarea raspunsului unui circuit liniar, invariant in timp folosind Transformata Laplace.
2. Care este transformata Laplace a semnalului treapta?
3. Care este transformata Laplace a semnalului puls dreptunghiular?
4. Determinati raspunsul circuitului cu functia de transfer:

- $H(s) = \frac{s}{s + 10}$;

- $H(s) = s$, $H(s) = \frac{1}{s}$;

- $H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 10)}$;

- $H(s) = \frac{1}{s^2 + .1s + 1}$

la semnale de intrare de forma:

- semnal treapta;

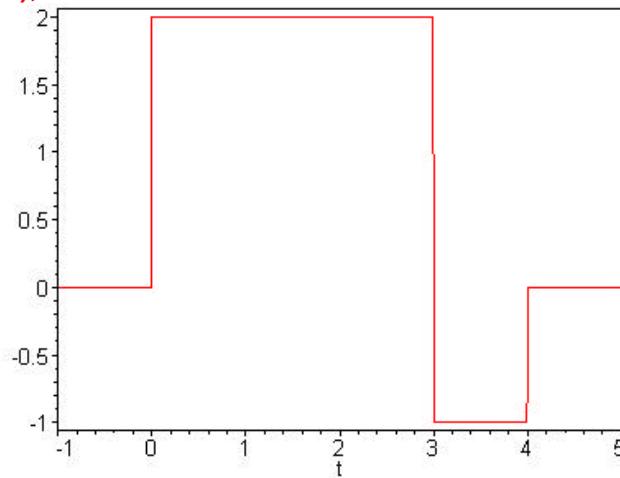
Raspunsul de regim tranzitoriu al circuitelor liniare

- semnal puls dreptunghiular;
- semnal format dintr-un puls dreptunghiular de amplitudine 2 cu latime 3 si un puls dreptunghiular de ampl -1 cu latime 1;

> **e:=2*Heaviside(t)-3*Heaviside(t-3)+Heaviside(t-4);**

$$e := 2 \text{Heaviside}(t) - 3 \text{Heaviside}(t - 3) + \text{Heaviside}(t - 4)$$

> **plot(e, t=-1..5,axes=box);**



Legatura dintre raspunsul de regim liber al circuitelor liniare si pozitia polilor functiei de transfer

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	1
Exemple	2
Pol simplu pe axa reala	2
Cazul I.....	2
Cazul II.	3
Cazul III.	3
Reprezentare dinamica:.....	4
Pol multiplu pe axa reala	4
Cazul I.....	4
Cazul II.	5
Cazul III.	5
Poli simpli complex conjugati	6
Cazul I.....	6
Cazul II.	7
Cazul III.	7
Reprezentare dinamica:.....	8
Poli multipli complex conjugati	9
Cazul II	9
Intrebari	9

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Determinarea legaturii intre pozitia polilor si forma functiei pondere (raspuns la impuls) $h(t)$ pentru sisteme simple cu: pol real, pol real dublu sau doi poli complex conjugati.

Rezumat teoretic:

Consideram un liniar descris de functia de transfer $H(s)$, avand originalul $h(t)$ (functia pondere). Vom nota cu $e(t)$ excitatia aplicata circuitului si cu $y(t)$ raspunsului sistemului considerat la aceasta excitatie. De asemenea, vom nota cu $E(s)$ transformata Laplace a excitatiei $e(t)$ si cu $Y(s)$ transformata Laplace a raspunsului $y(t)$.

Pentru determinarea functiei pondere se calculeaza transformata Laplace inversa a functiei de transfer $H(s)$ si se reprezinta grafic. Se urmareste plasarea polului respectiv a polilor complex conjugati in: semiplanul sting (domeniu de stabilitate), semiplanul drept (domeniu de instabilitate) sau la limita de stabilitate.

Mod de lucru

```
> restart:  
> libname:="~/SCSlib",libname:  
> with(plottools):  
> L:=table([dir=inttrans[laplace],inv=inttrans[invlaplace]]):  
> assume(_k,posint):assume(_alpha,positive):assume(_omega,positive):
```

Exemple

Pol simplu pe axa reala

Functia de transfer este forma

> **H := 1/(s-alpha);**

$$H := \frac{1}{s - \alpha}$$

Functia pondere este:

> **h :=**

simplify(convert(subs([_k=k,_alpha=alpha,_omega=omega],L[inv](subs([k=_k,alpha=_alpha,omega=_omega],H),s,t)),exp))*Heaviside(t);

$$h := e^{(\alpha t)} \text{Heaviside}(t)$$

Pozitia polilor analizati este:

> **PZ[grafic](1/s/(s-1)/(s+1)/(s-2)/(s+2),s);PZ[numeric](1/s/(s-1)/(s+1)/(s-2)/(s+2),s);**

Diagrama poli-zerourii

+ p5=-2. + p4=-1. + p1=0. + p2=1. + p3=2.

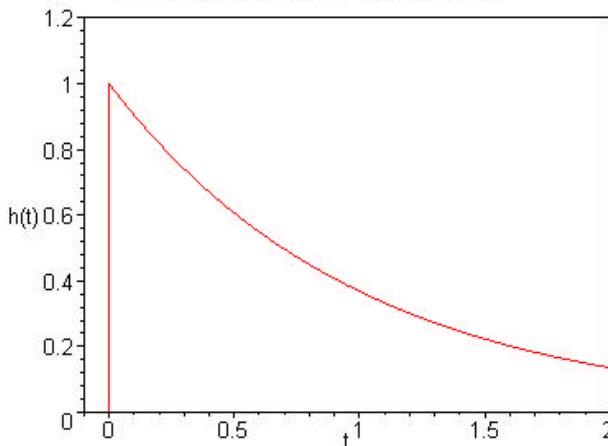
$$\begin{bmatrix} p1 & 0. \\ p2 & 1. \\ p3 & 2. \\ p4 & -1. \\ p5 & -2. \end{bmatrix}$$

Cazul I.

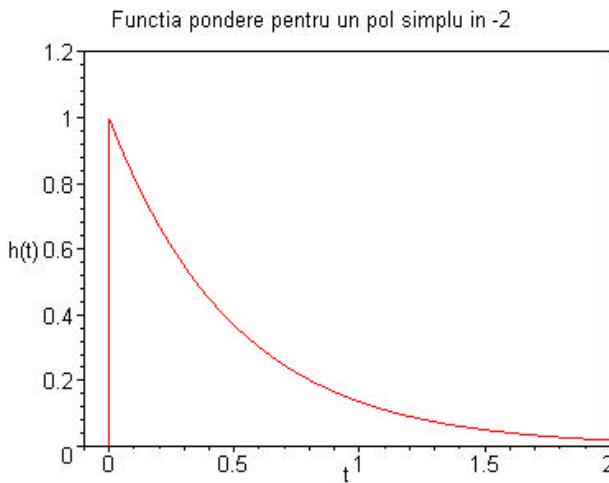
Polul este in semiplanul stang (are valoare negativa). Sistemul este stabil. In acest caz functia pondere este marginita. Graficul functiei pondere sunt reprezentate mai jos pentru cazul particular $\alpha = -1$ si $\alpha = -10$.

> **plot(eval(h,alpha=-1),t=-0.1..2,view=[-0.1..2,0..1.2],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru un pol simplu in -1", axes =box);**

Functia pondere pentru un pol simplu in -1



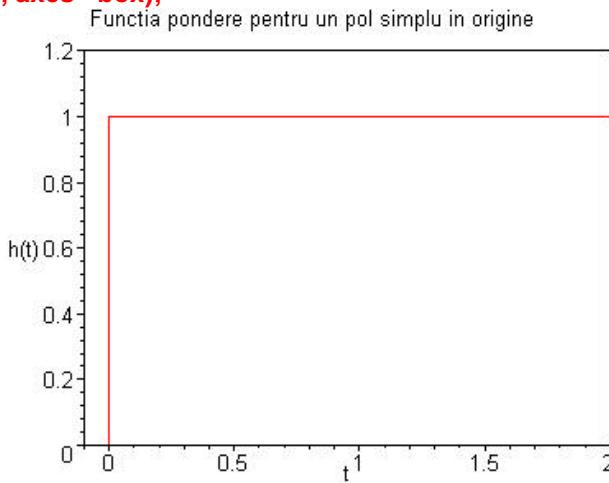
> **plot(eval(h,alpha=-2),t=-0.1..2,view=[-0.1..2,0..1.2],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru un pol simplu in -2", axes =box);**



Cazul II.

Polul este in origine (are valoare nula). Sistemul este stabil. In acest caz functia pondere este marginita. Functia pondere pentru cazul particular $\alpha = 0.1$ este:

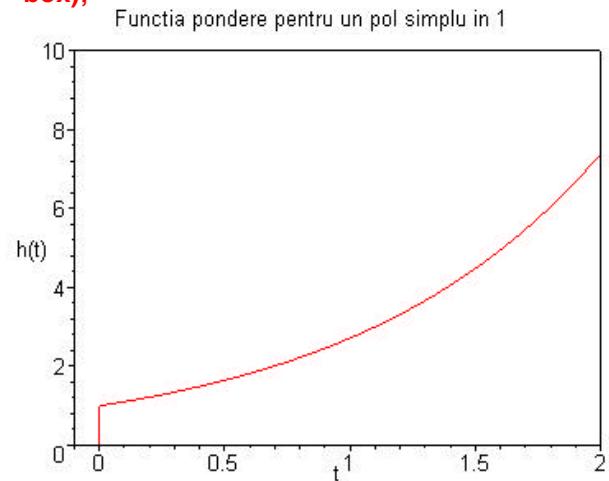
```
> plot(eval(h,alpha=0),t=-0.1..2,view=[-0.1..2,0..1.2],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru un pol simplu in origine", axes =box);
```



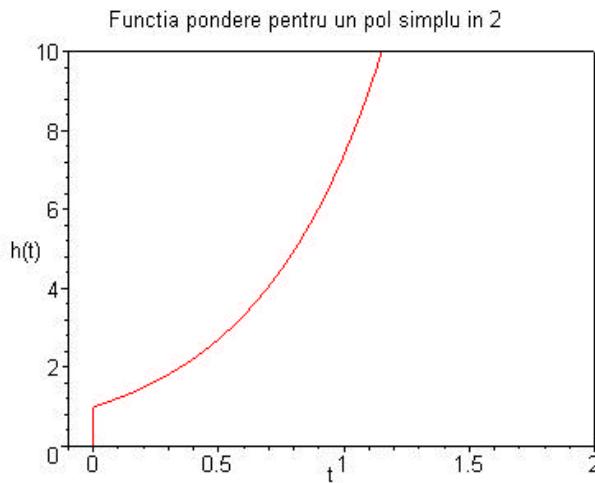
Cazul III.

Polul este in semiplanul drept (are valoare pozitiva). In acest caz sistemul este instabil. Functia pondere in acest caz este nemarginata. Graficul functiei pondere sunt reprezentate mai jos pentru cazul particular $\alpha = 1$ si $\alpha = 2$.

```
> plot(eval(h,alpha=1),t=-0.1..2,view=[-0.1..2,0..10],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru un pol simplu in 1", axes =box);
```



```
> plot(eval(h,alpha=2),t=-0.1..2,view=[-0.1..2,0..10],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru un pol simplu in 2", axes =box);
```



Reprezentare dinamica:

Se considera variatia polului real simplu aflat pe axa reala in intervalul $[-2, 2]$ in N puncte succesiv. Se urmareste modul de variație al functiei pondere.

```
> N:=20:alphad:=[seq(2*i/N-2*(1-i/N),i=0..N)]:
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([seq(op(PZ[grafic](eval(H,alpha=alphad[i]),s))[j],j=1..2]),
i=1..nops(alphad))),AXESSTYLE(BOX)):
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot(eval(h,alpha=alphad[i]),t=-0.1..0.5))[1]],i=1..nops(alphad))),AXESSTYLE(BOX)):
```

Pol multiplu pe axa reala

Functia de transfer este de forma

```
> H:=1/(s-alpha)^k;
```

$$H := \frac{1}{(s - \alpha)^k}$$

Functia pondere este:

```
> h := convert(subs([_k=k,_alpha=alpha,_omega=omega],L[inv](subs([k=_k,alpha=_alpha,
omega=_omega],H),s,t)),exp)*Heaviside(t);
```

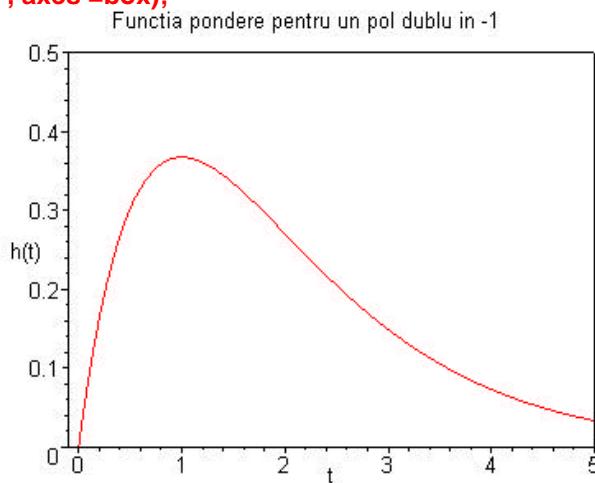
$$h := \frac{e^{(\alpha t)} t^{(k-1)}}{\Gamma(k)} \text{Heaviside}(t)$$

Pozitia polilor este asemanatoare.

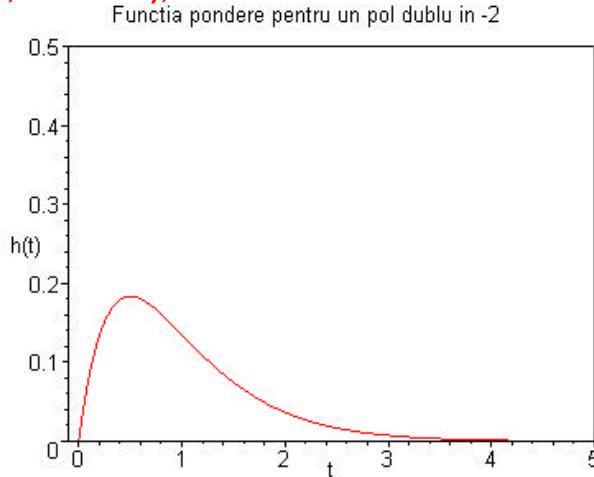
Cazul I.

Polii sunt in semiplanul stang. Sistemul este stabil. In acest functia pondere este marginita, viteza de scadere spre zero fiind data de ordinul de multiplicitate al polului. Functia pondere este reprezentata mai jos pentru cazul particular $\alpha = -1$ si $\alpha = -2$ cu $k = 2$.

```
> plot(eval(h,[alpha=-1,k=2]),t=-0.1..5,view=[-0.1..5,0..0.5],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru un pol dublu in -1", axes =box);
```



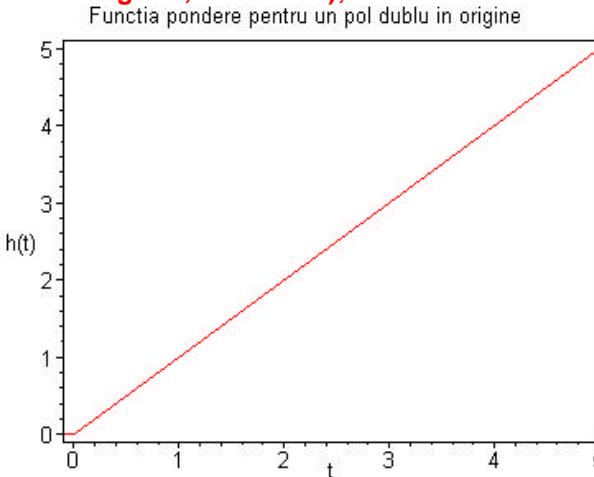
```
> plot(eval(h,[alpha=-2,k=2]),t=-0.1..5,view=[-0.1..5,0..0.5],labels=["t","h(t)],title="Functia pondere pentru un pol dublu in -2", axes =box);
```



Cazul II.

Polii sunt in originine. Sistemul este stabil. In acest functia pondere este marginita, viteza de scadere spre zero fiind data de ordinul de multiplicitate al polului. Functia pondere este reprezentata mai jos pentru cazul particular $\alpha = 0$ si $k = 2$.

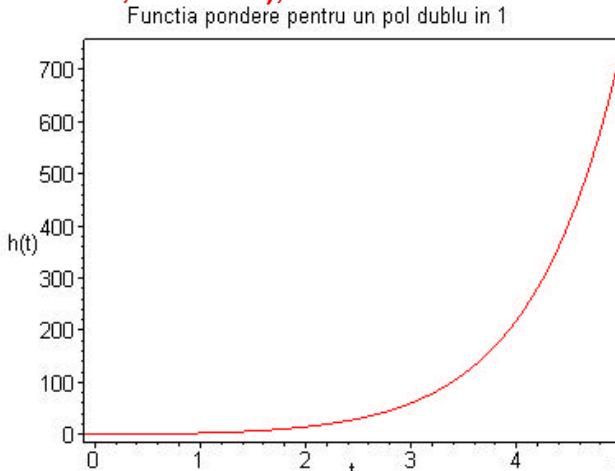
```
> plot(eval(h,[alpha=0,k=2]),t=-0.1..5,view=[-0.1..5,DEFAULT],labels=["t","h(t)],title="Functia pondere pentru un pol dublu in origine", axes =box);
```



Cazul III.

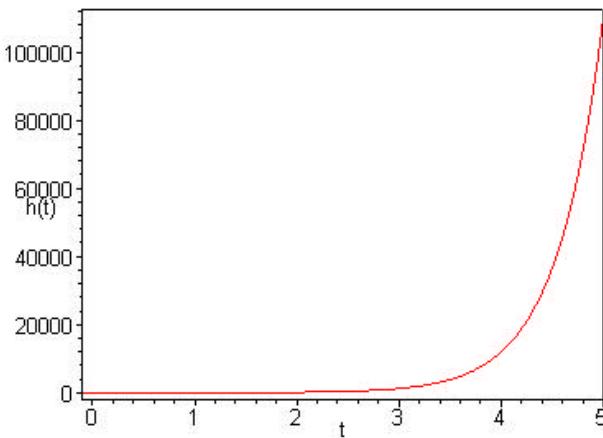
Polii sunt in semiplanul drept. Sistemul este instabil. Functia pondere este nemarginata, viteza de crestere spre infinit fiind data de ordinul de multiplicitate al polului. Functia pondere in acest caz sunt reprezentate mai jos pentru cazul particular $\alpha = 1$ si $\alpha = 2$ cu $k = 2$

```
> plot(eval(h,[alpha=1,k=2]),t=-0.1..5,view=[-0.1..5,DEFAULT],labels=["t","h(t)],title="Functia pondere pentru un pol dublu in 1", axes =box);
```



```
> plot(eval(h,[alpha=2,k=2]),t=-0.1..5,view=[-0.1..5,DEFAULT],labels=["t","h(t)],title="Functia pondere pentru un pol dublu in 2", axes =box);
```

Functia pondere pentru un pol dublu in 2



Poli simpli complex conjugati

Functia de transfer este de forma:

$$> H:=\omega/(s-\alpha+i\omega)(s-\alpha-i\omega);$$

$$H := \frac{\omega}{(s - \alpha + I \omega)(s - \alpha - I \omega)}$$

Functia pondere este de forma:

$$> h :=$$

$$\text{simplify(convert(subs([_k=k,_alpha=alpha,_omega=omega],L[inv](subs([_k=_k,alpha=_alpha,omega=_omega],H),s,t)),sincos))*Heaviside(t);}$$

$$h := e^{(\alpha t)} \sin(\omega t) \text{Heaviside}(t)$$

Pozitia polilor analizati este:

$$> PZ[grafic](1/(s^2+10000)/(s^2+40000)/(s^2-2*s+10000)/(s^2+2*s+10000)/(s^2-2*s+40000)/(s^2+2*s+40000)/(s^2-4*s+10000)/(s^2+4*s+10000)/(s^2-4*s+40000)/(s^2+4*s+40000),s);$$

Diagrama poli-zerouri

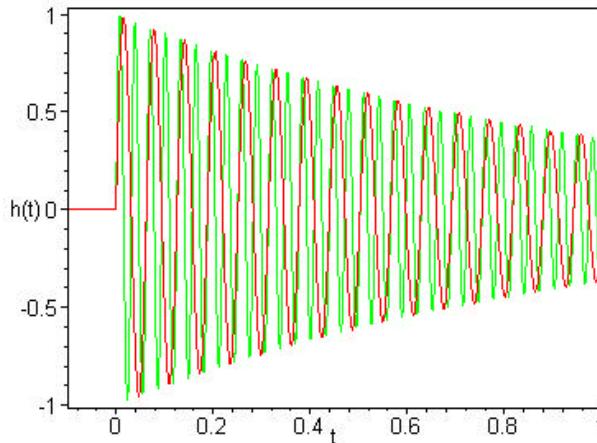
+ p9=-2.000+200.0*I	+ p7=-1.000+200.0*I	+ p6=200.0*I	+ p4=1.000+200.0*I	+ p3=2.000+200.0*I
+ p10=-2.000+99.98*I	+ p8=-1.000+99.99*I	+ p5=100.0*I	+ p2=1.000+99.99*I	+ p1=2.000+99.98*I
+ p11=-2.000-99.98*I	+ p12=-1.000-99.99*I	+ p15=-100.0*I	+ p18=1.000-99.99*I	+ p20=2.000-99.98*I
+ p13=-2.000-200.0*I	+ p14=-1.000-200.0*I	+ p16=-200.0*I	+ p17=1.000-200.0*I	+ p19=2.000-200.0*I

Cazul I.

Polii sunt in semiplanul stang (au parte reala negativa). Sistemul este stabil. In acest caz functia pondere este marginita, viteza de scadere spre zero fiind data de valoarea partii reale a polilor. Functia pondere este reprezentata mai jos pentru cazul particular $\alpha = -1$ si $\omega = 100$ si $\omega = 200$.

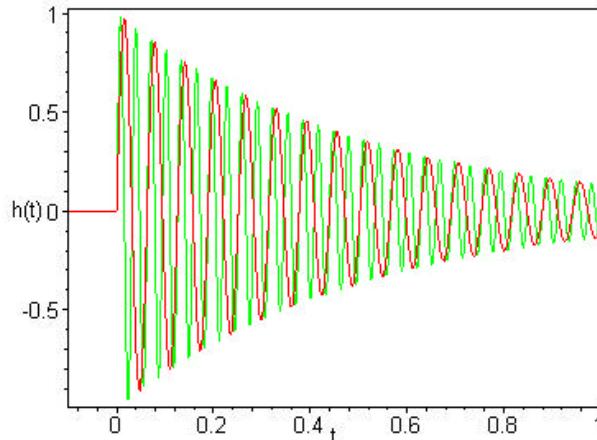
$$> \text{plot}([\text{eval}(h,[\alpha=-1,\omega=100]),\text{eval}(h,[\alpha=-1,\omega=200])],t=-0.1..2,\text{view}=[-0.1..1,\text{DEFAULT}],\text{labels}=[["t","h(t)"],\text{title}=\text{"Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala -1"},\text{axes}=\text{box});$$

Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala -1



```
> plot([eval(h,[alpha=-2,omega = 100]),eval(h,[alpha=-2,omega = 200])],t=-0.1..2,view=[-0.1..1,DEFAULT],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala -2", axes =box);
```

Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala -2

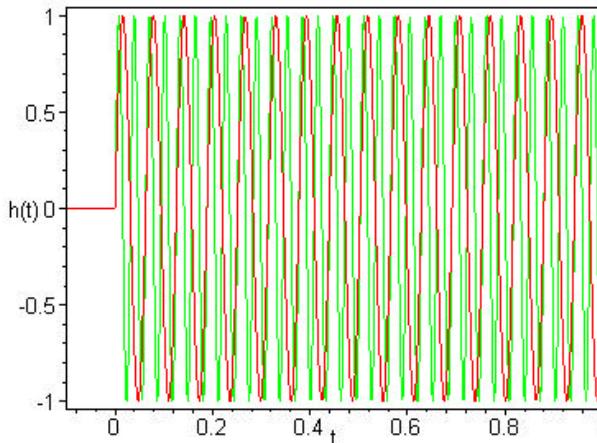


Cazul II.

Polii sunt pe axa imaginara. Sistemul este instabil. Functia pondere este de forma unui semnal armonic cu amplitudine constanta. Functia pondere este reprezentata mai jos pentru cazul particular $\alpha = 0$ și $\omega = 100$ și $\omega = 200$.

```
> plot([eval(h,[alpha=0,omega = 100]),eval(h,[alpha=0,omega = 200])],t=-0.1..2,view=[-0.1..1,DEFAULT],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala nula", axes =box);
```

Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala nula



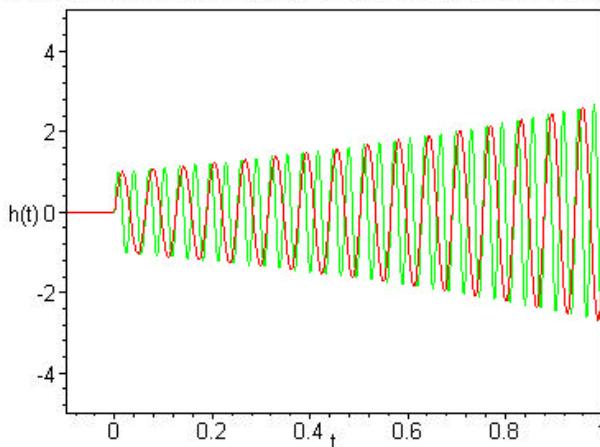
Cazul III.

Polii sunt in semiplanul drept. Sistemul este instabil. Functia pondere este de forma unui semnal armonic cu amplitudine crescatoare spre infinit, viteza de crestere fiind data de valoarea partii reale a polilor.

Funcția pondere este reprezentata mai jos pentru cazul particular $\alpha = 1$ și $\alpha = 2$ iar $\omega = 100$ și $\omega = 200$.

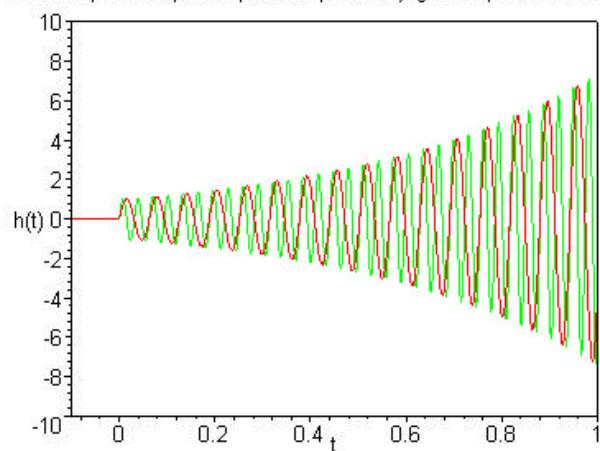
```
> plot([eval(h,[alpha=1,omega = 100]),eval(h,[alpha=1,omega = 200])],t=-0.1..1,view=[-0.1..1,-5..5],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala 1", axes =box);
```

Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala 1



```
> plot([eval(h,[alpha=2,omega = 100]),eval(h,[alpha=2,omega = 200])],t=-0.1..2,numpoints = 500,view=[-0.1..1,-10..10],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala 2", axes =box);
```

Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala 2



Reprezentare dinamica:

Se considera variatia perechii de poli complex conjugati variind partea reala in intervalul $[-2, 2]$ in N puncte succesiv, pastrind partea imaginara constanta si egala cu 100. Se urmareste modul de variație al functiei pondere.

```
> N:=20:alphad:=[seq(4*i/N-2,i=0..N)];  
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([seq(op(PZ[grafic](eval(H,[alpha=alphad[i],omega = 100]),s))][j],j=1..4)],i=1..nops(alphad))),AXESSTYLE(BOX),VIEW(-5..5,DEFAULT));  
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot(eval(h,[alpha=alphad[i],omega = 100]),t=-0.1..1.0))][1]],i=1..nops(alphad))),AXESSTYLE(BOX));
```

Se considera variatia perechii de poli complex conjugati variind partea imaginara in intervalul $[100, 200]$ in N puncte succesiv, pastrind partea reala constanta si egala cu -2. Se urmareste modul de variație al functiei pondere.

```
> N:=20:omegad:=[seq(100*i/N+100,i=0..N)];  
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([seq(op(PZ[grafic](eval(H,[alpha=-2,omega = ome gad[i]]),s))][j],j=1..4)],i=1..nops(omegad))),AXESSTYLE(BOX),VIEW(-5..5,DEFAULT));  
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot(eval(h,[alpha=-2,omega = ome gad[i]]),t=-0.1..1.0))][1]],i=1..nops(alphad))),AXESSTYLE(BOX));
```

Poli multipli complex conjugati

Functia de transfer este de forma:

> **H:=omega^2/((s-alpha+l*omega)*(s-alpha-l*omega))^2;**

$$H := \frac{\omega^2}{(s - \alpha + I\omega)^2 (s - \alpha - I\omega)^2}$$

Functia pondere este de forma:

> **h := convert(subs([_k=k,_alpha=alpha,_omega=omega],simplify(L[inv](subs([k=_k,alpha=_alpha,omega=_omega],H),s,t))),sincos)*Heaviside(t);**

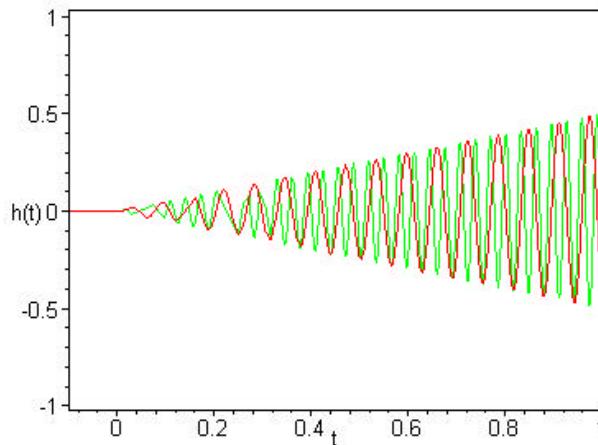
$$h := -\frac{1}{2} \frac{e^{(\alpha t)} (-\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t))}{\omega} \text{Heaviside}(t)$$

Cazul II

Polii sunt in pe axa imaginara (au parte reala nula). Sistemul este stabil. In acest caz functia pondere este marginita,viteza de scadere spre zero fiind data de ordinul de multiplicitate al polilor. Pozitia polilor functiei de transfer in planul complex si variatia functiei pondere sunt reprezentate mai jos pentru cazul particular $\alpha = 0$, $\omega = 100$ si $k = 2$.

> **plot([eval(h,[alpha=0,omega = 100]),eval(h,[alpha=0,omega = 200])],t=-0.1..2,view=[-0.1..1,DEFAULT],labels=["t","h(t)"],title="Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala nula", axes =box);**

Functia pondere pentru poli complex conjugati cu parte reala nula



Intrebari. Probleme

1. Care este legatura intre viteza de variatie a functiei pondere si pozitia polului real?
2. Care este legatura intre viteza de variatie a infasuratorii functie pondere si pozitia polilor complex conjugati?
3. Pentru care din configuratiile poli-zerouri, functia pondere este marginita?

Raspunsul de regim permanent al circuitelor liniare

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
Filtre de ordinul I.....	2
Filtre de ordinul I trece jos	2
Reprezentarea Functiei de Transfer	2
Raspunsul la semnal armonic	3
Raspunsul la semnal armonic de frecventa de taiere a filtrului	3
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent	4
Filtre de ordinul I trece sus	5
Reprezentarea Functiei de Transfer	5
Raspunsul la semnal armonic	6
Raspunsul la semnal armonic de frecventa de taiere a filtrului	6
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent	7
Filtre de ordinul II.....	8
Filtre de ordinul II trece jos	8
Reprezentarea Functiei de Transfer	8
Raspunsul la semnal armonic	9
Raspunsul la semnal armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a filtrului.....	9
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent	10
Filtre de ordinul II trece banda	11
Reprezentarea Functiei de Transfer	11
Raspunsul la semnal armonic	12
Raspunsul la semnal armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a filtrului.....	12
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent	13
Filtre de ordinul II trece sus	13
Reprezentarea Functiei de Transfer	14
Raspunsul la semnal armonic	14
Raspunsul la semnal armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a filtrului.....	15
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent	16
Probleme. Intrebari.....	16

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Determinarea raspunsului de regim permanent sinusoidal al unor sisteme de ordinul I si II.

Rezumat teoretic:

Pentru circuite liniare lucrând în regim permanent sinusoidal functia de transfer are semnificatia de **amplificare generalizata**. Un semnal $e(t)=A \cos(\omega_0 t + \phi)$ aplicat la intrarea circuitului liniar descris de functia de transfer $H(s)$ se regaseste la iesire sub forma:

$$y(t) = A |H(s)|_{s=j\omega_0} \cos(\omega_0 t + \phi + \arg H(s)_{s=j\omega_0})$$

adică amplificat cu modulul functiei de transfer la frecventa ω_0 și defazat suplimentar cu argumentul functiei de transfer la aceasi frecventa ω_0 .

Pentru un semnal de intrare format prin sumarea unui numar de semnale sinusoidale:

$$e(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_{0k} t + j_k)$$

Iesirea se poate calcula pe baza proprietati de liniaritate:

$$y(t) = A_0 H(j0) + \sum_{k=1}^N A_k |H(j\omega_{0k})| \cos(\omega_{0k} t + j_k + \arg H(j\omega_{0k}))$$

Mod de lucru

```
> restart;
> libname:="..../SCSlib",libname;
> F:=table([dir=inttrans[fourier],inv=inttrans[invfourier]]):
```

Exemple

In cele ce urmeaza ne propunem sa determinam raspunsul de regim periodic al unor circuite relativ simple (de ordinul I si II) la cateva tipuri de excitatii particulare (semnal treapta, puls dreptunghiular, succesiune de pulsuri dreptunghiulare). Pentru realizarea facila a calculelor simbolice, mai jos sau asociat diverse proprietati unor variabile locale:

Filtre de ordinul I

Filtre de ordinul I trece jos

In acest caz functia de transfer a circuitului este:

```
> H:=alpha/(s+alpha);
```

$$H := \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

```
> H:=subs(s=I*omega,alpha/(s+alpha));
```

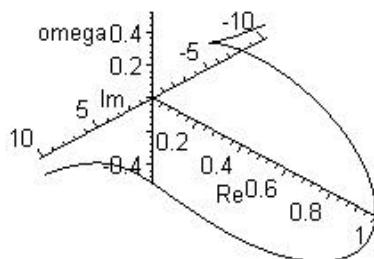
$$H := \frac{\alpha}{I\omega + \alpha}$$

Reprezentarea Functiei de Transfer

Reprezentarea functiei de transfer a filtrului se observa din graficul de mai jos:

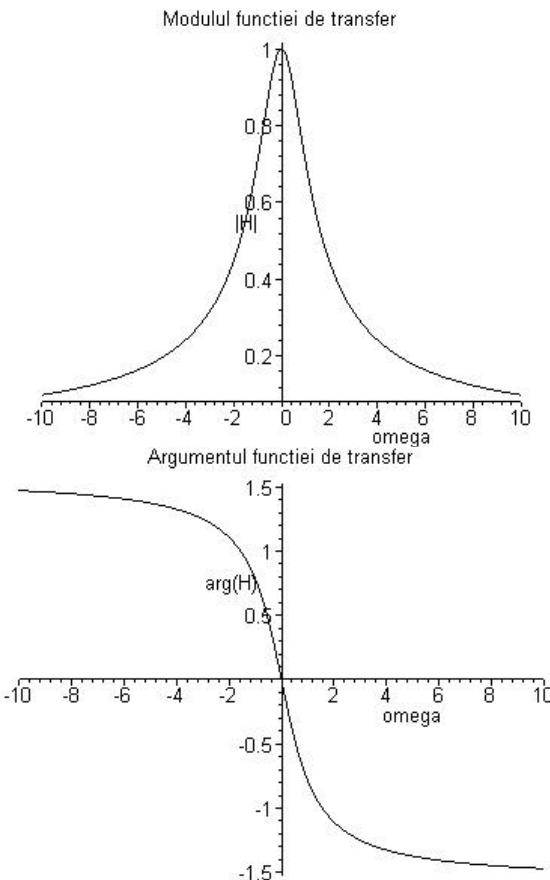
```
> PLOTH:=plots[spacecurve]([omega,Re(eval(H,alpha=1)),Im(eval(H,alpha=1))],omega=-10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","Re","Im"],title="Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)":PLOTH;
```

Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)



Modulul si argumentul functiei de transfer sunt reprezentate in figurile de mai jos:

```
> plot(abs(eval(H,alpha=1)),omega=-10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","|H|"],title="Modulul functiei de transfer"); plot(argument(eval(H,alpha=1)),omega=-10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","arg(H)"],title="Argumentul functiei de transfer");
```



Raspunsul la semnal armonic

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*cos(w0*t);**

$$e := A0 \cos(w0 t)$$

Transformata Fourier a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=F[dir](e,t,omega);**

$$E := A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))$$

Transformata Fourier a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{\alpha A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))}{I \omega + \alpha}$$

Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> **y:=simplify(normal(convert(F[inv](Y,omega,t),trig),expanded));**

$$y := \frac{\alpha A0 (w0 \sin(w0 t) + \alpha \cos(w0 t))}{w0^2 + \alpha^2}$$

Raspunsul la semnal armonic de frecventa de taiere a filtrului

Se calculeaza raspunsul circuitului la frecventa egala cu frecventa de taiere a filtrului:

> **e1:=eval(e,w0=alpha);**

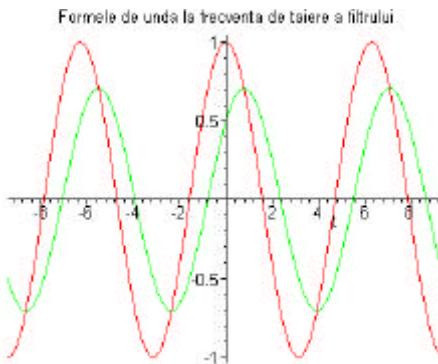
$$e1 := A0 \cos(\alpha t)$$

> **y1:=simplify(eval(y,w0=alpha));**

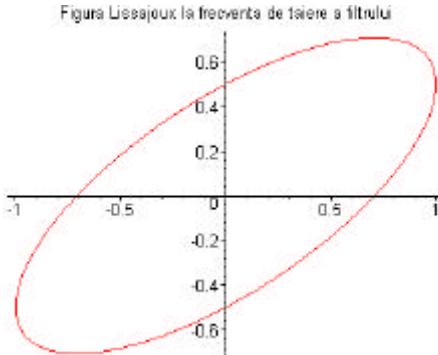
$$y1 := \frac{1}{2} A0 (\sin(\alpha t) + \cos(\alpha t))$$

> **plot(eval([e1,y1],[alpha=1,A0=1]),t=-3*Pi..3*Pi,title="Formele de unda la frecventa de taiere a filtrului");**

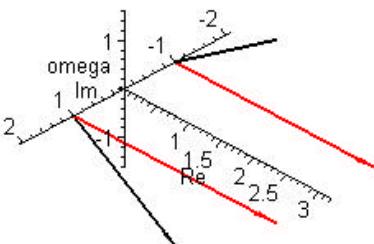
Raspunsul de regim permanent al circuitelor liniare



```
> plot(eval([e1,y1,t=-Pi..Pi],[alpha=1,A0=1]),title="Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului");
```



```
> INTERFACE_PLOT3D(rpa(eval(E,[A0=1,alpha=1,w0=1]),omega,interval=-2..2,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1,alpha=1,w0=1]),omega,interval=-2..2,culoare=[0,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));
Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)
```

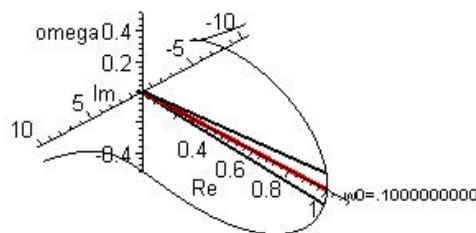


Reprezentare animata a comportarii de regim permanent

Reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> wd:=evalf([seq(10^(i/10),i=-10..10)]):
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([CURVES(op(op(plot(eval(e,[A0=1,alpha=1,w0=wd[i]]),t=-Pi..Pi))[1])[1],COLOR(RGB,1,0,0)),CURVES(op(op(plot(eval(y,[A0=1,alpha=1,w0=wd[i]]),t=-Pi..Pi))[1])[1],COLOR(RGB,0,0,0)),TEXT([2,0,2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("t","e(t),y(t)'),TITLE("Forma de unda a semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)'')):
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot([eval(e,[A0=1,alpha=1,w0=wd[i]]),eval(y,[A0=1,
alpha=1,w0=wd[i]]),t=-Pi/wd[i]..Pi/wd[i]],color=black)][1],TEXT([0.2,0,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],
string)), FONT(HELVETICA,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("e(t)","y(t)'),TITLE("Figura Lissajoux')):
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([rpa(eval(E,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),omega,interval=-10..10,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),omega,interval=-10..10,culoare=[0,0,0]),op(PLOTH)[1],TEXT([0,1,1,0],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8),COLOR(RGB,0,0,0)]),i=1..nops(wd))),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)''));
```

Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)



Filtre de ordinul I trece sus

In acest caz functia de transfer a circuitului este:

> **H:=s/(s+alpha);**

$$H := \frac{s}{s + \alpha}$$

> **H:=subs(s=I*omega,s/(s+alpha));**

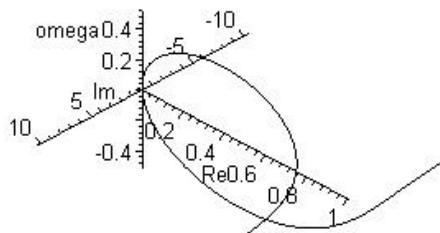
$$H := \frac{I \omega}{I \omega + \alpha}$$

Reprezentarea Functiei de Transfer

Reprezentarea functiei de transfer a filtrului se observa din graficul de mai jos:

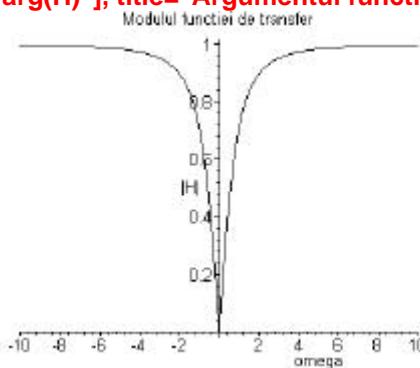
> **PLOT:=plots[spacecurve]([omega,Re(eval(H,alpha=1)),Im(eval(H,alpha=1))],omega=-10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=[["omega","Re","Im"],title="Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa")]:PLOT;**

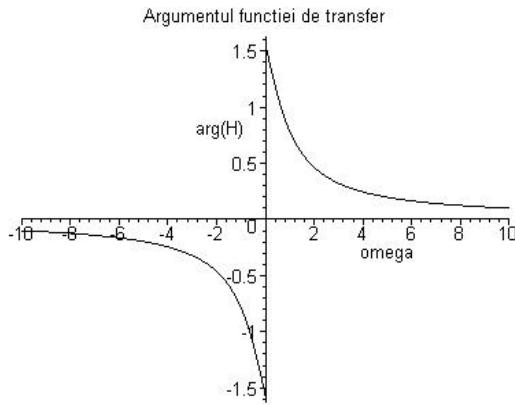
Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)



Modulul si argumentul functiei de trasfer sunt reprezentate in figurile de mai jos:

> **plot(abs(eval(H,alpha=1)),omega=-10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=[["omega","|H|"], title="Modulul functiei de transfer"); plot(argument(eval(H,alpha=1)),omega=-10..10,numpoints=400,color=black, axes=normal,labels=[["omega", "arg(H)"], title="Argumentul functiei de transfer");**





Raspunsul la semnal armonic

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*cos(w0*t);**

$$e := A0 \cos(w0 t)$$

Transformata Fourier a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=F[dir](e,t,omega);**

$$E := A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))$$

Transformata Fourier a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{I \omega A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))}{I \omega + \alpha}$$

Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> **y:=simplify(normal(convert(F[inv](Y,omega,t),trig),expanded));**

$$y := \frac{A0 w0 (w0 \cos(w0 t) - \alpha \sin(w0 t))}{w0^2 + \alpha^2}$$

Raspunsul la semnal armonic de frecventa de taiere a filtrului

Se calculeaza raspunsul circuitului la frecventa egala cu frecventa de taiere a filtrului:

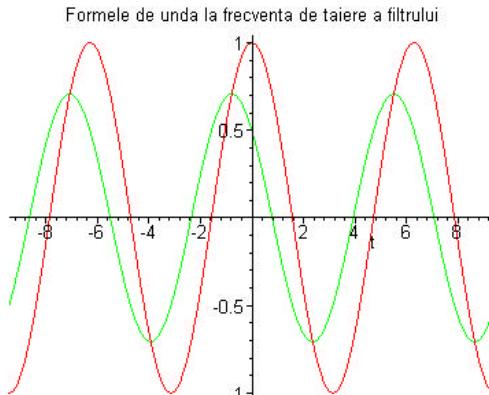
> **e1:=eval(e,w0=alpha);**

$$e1 := A0 \cos(\alpha t)$$

> **y1:=simplify(eval(y,w0=alpha));**

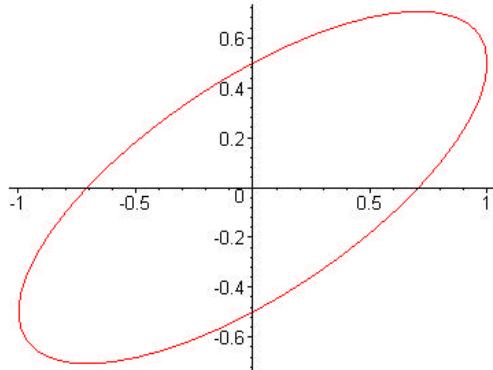
$$y1 := \frac{1}{2} A0 (\cos(\alpha t) - \sin(\alpha t))$$

> **plot(eval([e1,y1],[alpha=1,A0=1]),t=-3*Pi..3*Pi,title="Formele de unda la frecventa de taiere a filtrului");**

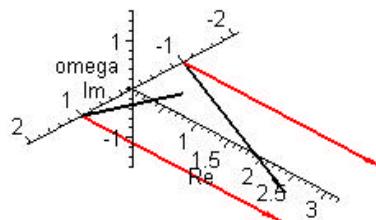


> **plot(eval([e1,y1,t=-Pi..Pi],[alpha=1,A0=1]),title="Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului");**

Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului



```
> INTERFACE_PLOT3D(rpa(eval(E,[A0=1,alpha=1,w0=1]),omega,interval=-2..2,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1,alpha=1,w0=1]),omega,interval=-2..2,culoare=[0,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));
Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)
```



Reprezentare animata a comportarii de regim permanent

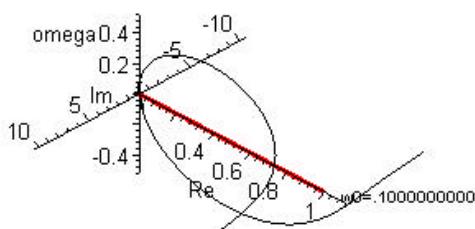
In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> wd:=evalf([seq(10^(i/10),i=-10..10)]):
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([CURVES(op(op(plot(eval(e,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),t=-Pi..Pi))[1],COLOR(RGB,1,0,0)),CURVES(op(op(plot(eval(y,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),t=-Pi..Pi))[1],COLOR(RGB,0,0,0)),TEXT([2,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("t","e(t),y(t)'),TITLE("Forma de unda a semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)'"));

>
INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot([eval(e,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),eval(y,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),t=-Pi/wd[i]..Pi/wd[i]],color=black)][1],TEXT([0.2,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("e(t)","y(t)'),TITLE("Figura Lissajoux'));

> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([rpa(eval(E,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),omega,interval=-10..10,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1/Pi,alpha=1,w0=wd[i]]),omega,interval=-10..10,culoare=[0,0,0]),op(PLOTH)[1],TEXT([0,1.1,0],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8),COLOR(RGB,0,0,0))),i=1..nops(wd))),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)'));
```

Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)



Filtre de ordinul II

Vom discuta despre filtre de ordinul cu poli complex conjugati.

Filtre de ordinul II trece jos

In acest caz functia de transfer este:

> $H := \omega_0^2 / (s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2);$

$$H := \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

> $H := \text{subs}(s = I\omega, \omega_0^2 / (s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2));$

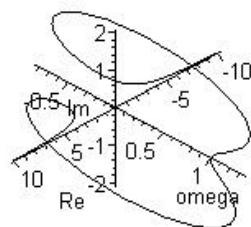
$$H := \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + 2I\alpha\omega + \omega_0^2}$$

Reprezentarea Functiei de Transfer

Reprezentarea functiei de transfer a filtrului se observa din graficul de mai jos:

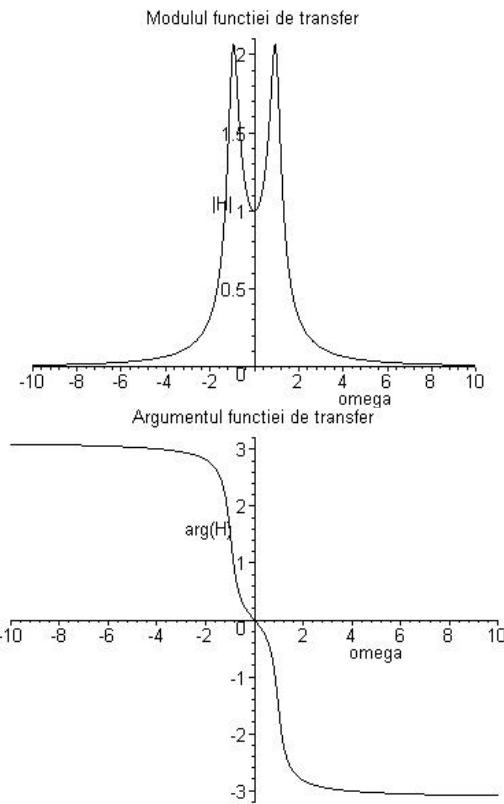
```
> PLOT_H := plots[spacecurve]([omega, Re(eval(H, [alpha=0.25, omega0=1])), Im(eval(H, [alpha=0.25, omega0=1]))], omega=-10..10, numpoints=400, color=black, axes=normal, labels=[["omega"], ["Re"], ["Im"]], title="Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)": PLOT_H;
```

Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)



Modulul si argumentul functiei de transfer sunt reprezentate in figurile de mai jos:

```
> plot(abs(eval(H, [alpha=0.25, omega0=1])), omega=-10..10, numpoints=400, color=black, axes=normal, labels=[["omega"], "|H|"], title="Modulul functiei de transfer"); plot(argument(eval(H, [alpha=0.25, omega0=1])), omega=-10..10, numpoints=400, color=black, axes=normal, labels=[["omega"], "arg(H)"], title="Argumentul functiei de transfer");
```



Raspunsul la semnal armonic

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*cos(w0*t);**

$$e := A0 \cos(\omega_0 t)$$

Transformata Fourier a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=F[dir](e,t,omega);**

$$E := A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + \omega_0) + \pi \text{Dirac}(\omega + \omega_0))$$

Transformata Fourier a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=normal(H*E,expanded);**

$$Y := \frac{\omega_0^2 A0 \pi \text{Dirac}(-\omega + \omega_0) + \omega_0^2 A0 \pi \text{Dirac}(\omega + \omega_0)}{-\omega^2 + 2 I \alpha \omega + \omega_0^2}$$

Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> **y:=simplify(normal(convert(F[inv](Y,omega,t),trig),expanded));**

$$y := -\frac{A0 \omega_0^2 (\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - 2 \alpha \omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t))}{\omega_0^4 - 2 \omega_0^2 \omega_0^2 + 4 \alpha^2 \omega_0^2 + \omega_0^4}$$

Raspunsul la semnal armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a filtrului

Se calculeaza raspunsul circuitului la frecventa egala cu frecventa de taiere a filtrului:

> **e1:=eval(e,w0=omega0);**

$$e1 := A0 \cos(\omega_0 t)$$

> **e1 := A0*cos(omega0*t);**

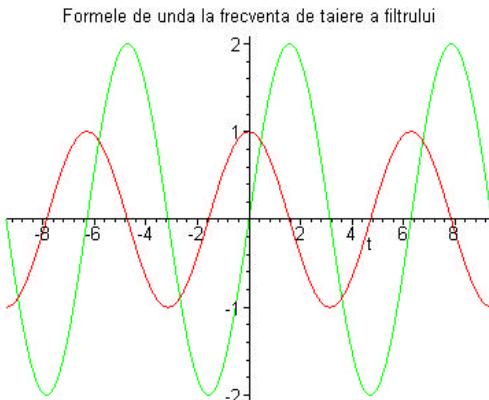
$$e1 := A0 \cos(\omega_0 t)$$

> **y1:=simplify(eval(y,w0=omega0));**

$$y1 := \frac{1}{2} \frac{A0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)}{\alpha}$$

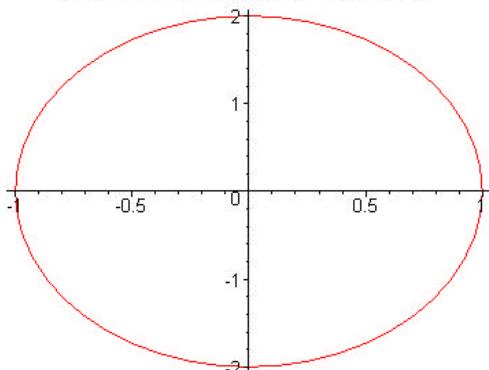
> **plot(eval([e1,y1],[alpha=0.25,omega0=1,A0=1]),t=-3*Pi..3*Pi,title="Formele de unda la frecventa de taiere a filtrului");**

Raspunsul de regim permanent al circuitelor liniare



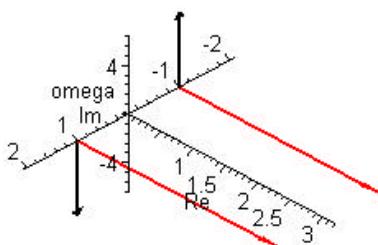
```
> plot(eval([e1,y1,t=-Pi..Pi],[alpha=0.25,omega0=1,A0=1]),title="Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului");
```

Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului



```
> INTERFACE_PLOT3D(rpa(eval(E,[A0=1,alpha=0.25,omega0=1,w0=1]),omega,interval=-2..2,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1,alpha=0.25,omega0=1,w0=1]),omega,interval=-2..2,culoare=[0,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));
```

Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)



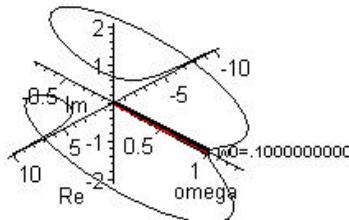
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> wd:=evalf([seq(10^(i/10),i=-10..10)]):
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([CURVES(op(op(plot(eval(e,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,
w0=wd[i]),t=-Pi..Pi))[1][1],COLOR(RGB,1,0,0)),CURVES(op(op(plot(eval(y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,
omega0=1,w0=wd[i]),t=-Pi..Pi))[1][1],COLOR(RGB,0,0,0)),TEXT([2,0.2],cat("w0=",
convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("t","e(t),y(t)'),TITLE("F
orma de unda a semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));
> INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot([eval(e,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),
eval(y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]],t=-Pi/wd[i]..Pi/wd[i],color=black))[1],
TEXT([0.2,0.2], cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8))),i=1..nops(wd))),,
AXESLABELS("e(t)","y(t)'),TITLE("Figura Lissajoux"));
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([rpa(eval(E,[A0=1/Pi,omega0=1,alpha=0.25,w0=wd[i]]),
omega,interval=-10..10,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),
```

```
omega,interval=-10..10,culoare=[0,0,0]),op(PLOTH)[1],TEXT([0,1.1,0],cat("w0=",
convert(wd[i],string)), FONT(HELVETICA,8),COLOR(RGB,0,0,0)],i=1..nops(wd))),
AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie
(rosu) si raspuns (negru)");
```

Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)



Filtre de ordinul II trece banda

In acest caz functia de transfer este:

```
> H:=2*alpha*s/(s^2+2*alpha*s+omega0^2);
```

$$H := 2 \frac{\alpha s}{s^2 + 2 \alpha s + \omega_0^2}$$

```
> H:=subs(s=I*omega,2*alpha*s/(s^2+2*alpha*s+omega0^2));
```

$$H := \frac{2 I \alpha \omega}{-\omega^2 + 2 I \alpha \omega + \omega_0^2}$$

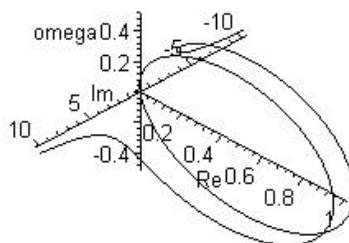
Reprezentarea Functiei de Transfer

Reprezentarea functiei de transfer a filtrului se observa din graficul de mai jos:

>

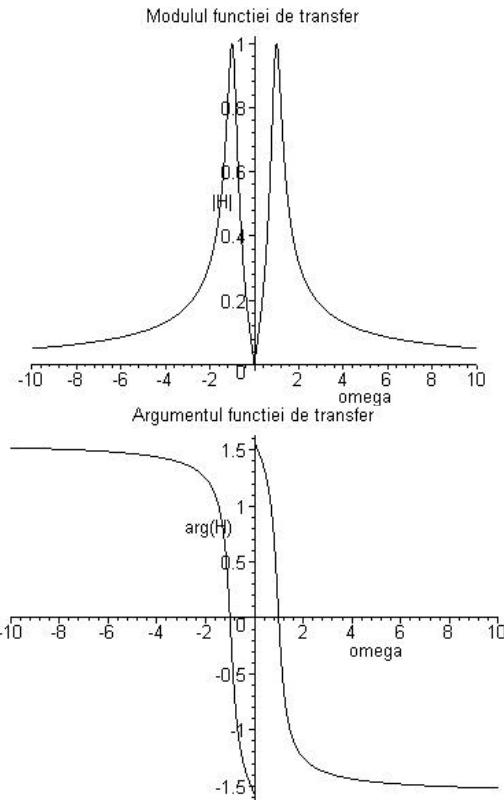
```
PLOTH:=plots[spacecurve]([omega,Re(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),Im(eval(H,[alpha=0.25,ome
ga0=1])),omega=-
10..10,numpoints=800,color=black,axes=normal,labels=["omega","Re","Im"],title="Functia de
transfer a filtrului (dependenta de frecventa)":PLOTH;
```

Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)



Modulul si argumentul functiei de transfer sunt reprezentate in figurile de mai jos:

```
> plot(abs(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),omega=-
10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","|H|"],title="Modulul functiei de
transfer"); plot(argument(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),omega=-
10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","arg(H)"],title="Argumentul
functiei de transfer");
```



Raspunsul la semnal armonic

In acest caz expresia excitatiei $e(t)$ este de forma:

> **e:=A0*cos(w0*t);**

$$e := A0 \cos(w0 t)$$

- Transformata Fourier a excitatiei $e(t)$ este:

> **E:=F[dir](e,t,omega);**

$$E := A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))$$

- Transformata Fourier a excitatiei $y(t)$ este:

> **Y:=H*E;**

$$Y := \frac{2 I \alpha \omega A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))}{-\omega^2 + 2 I \alpha \omega + \omega^2}$$

- Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> **y:=simplify(normal(convert(F[inv](Y,omega,t),trig),expanded));**

$$y := 2 \frac{\alpha A0 w0 (w0^2 \sin(w0 t) + 2 \alpha w0 \cos(w0 t) - \omega^2 \sin(w0 t))}{w0^4 - 2 w0^2 \omega^2 + 4 \alpha^2 w0^2 + \omega^4}$$

Raspunsul la semnal armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a filtrului

Se calculeaza raspunsul circuitului la frecventa egala cu frecventa de taiere a filtrului:

> **e1:=eval(e,w0=omega0);**

$$e1 := A0 \cos(\omega0 t)$$

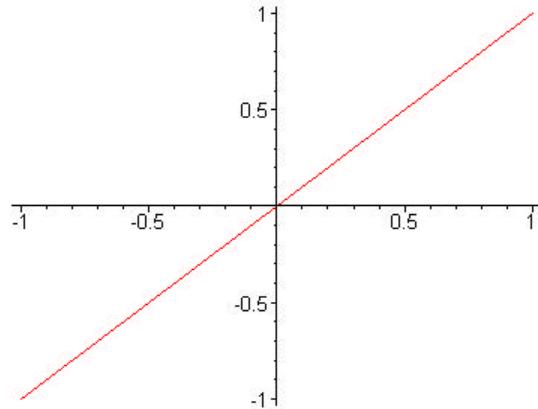
> **y1:=simplify(eval(y,w0=omega0));**

$$y1 := A0 \cos(\omega0 t)$$

Observatie: Pentru un semnal de intrare armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a circuitului, semnalul de iesire este identic cu cel de intrare.

> **plot(eval([e1,y1,t=-Pi..Pi],[alpha=0.25,omega0=1,A0=1]),title="Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului");**

Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului



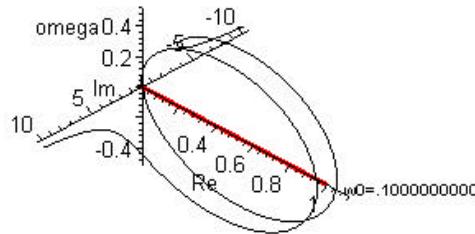
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> wd:=evalf([seq(10^(i/10),i=-10..10)]):
>
INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([CURVES(op(op(plot(eval(e,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),t=-
Pi..Pi)))[1]),COLOR(RGB,1,0,0)),CURVES(op(op(plot(eval(1.01*y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),t=-
Pi..Pi)))[1]),COLOR(RGB,0,0,0)),TEXT([2,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8
))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("t","e(t),y(t)",TITLE("Forma de unda a semnalelor excitatie (rosu)
si raspuns (negru)"));

>
INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot([eval(e,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),eval(y
,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),t=-
Pi/wd[i]..Pi/wd[i],color=black)][1],TEXT([0.2,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETIC
A,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("e(t)","y(t)",TITLE("Figura Lissajoux")));

>
INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([rpa(eval(E,[A0=1/Pi,omega0=1,alpha=0.25,w0=wd[i]]),omega,
interval=-
10..10,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),omega,interval=-
10..10,culoare=[0,0,0]),op(PLOTH)[1],TEXT([0,1.1,0],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVET
ICA,8),COLOR(RGB,0,0,0))),i=1..nops(wd))),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","I
m"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));
Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)
```



Filtre de ordinul II trece sus

In acest caz functia de transfer este:

```
> H:=s^2/(s^2+2*alpha*s+omega0^2);
```

$$H := \frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

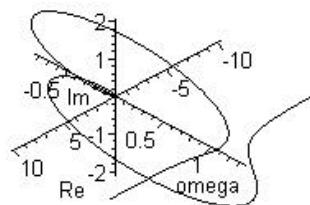
```
> H:=subs(s=j*omega,s^2/(s^2+2*alpha*s+omega0^2));
```

$$H := -\frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2}$$

Reprezentarea Functiei de Transfer

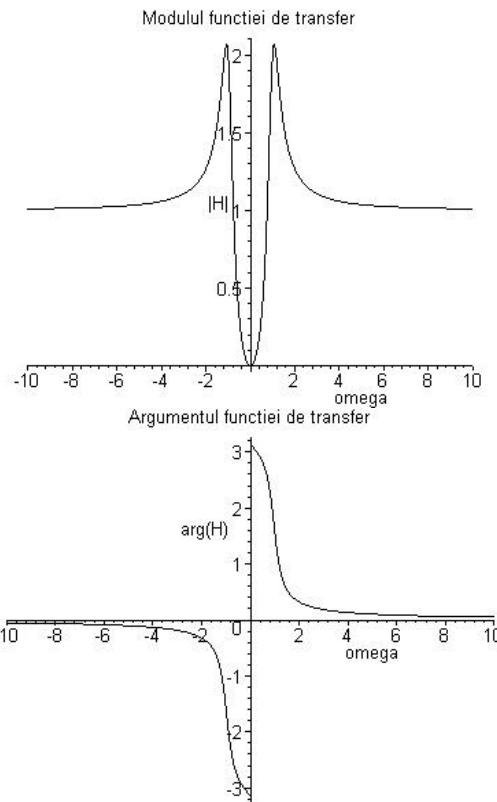
Reprezentarea functiei de transfer a filtrului se observa din graficul de mai jos:

```
> PLOT:=plots[spacecurve]([omega,Re(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),Im(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),omega=10..10,numpoints=800,color=black,axes=normal,labels=["omega","Re","Im"],title="Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)"):PLOT;
Functia de transfer a filtrului (dependenta de frecventa)
```



Modulul si argumentul functiei de transfer sunt reprezentate in figurile de mai jos:

```
> plot(abs(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),omega=10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","|H|"],title="Modulul functiei de transfer"); plot(argument(eval(H,[alpha=0.25,omega0=1])),omega=10..10,numpoints=400,color=black,axes=normal,labels=["omega","arg(H)"],title="Argumentul functiei de transfer");
```



Raspunsul la semnal armonic

In acest caz expresia excitatia $e(t)$ este de forma:

```
> e:=A0*cos(w0*t);
```

$$e := A0 \cos(w0 t)$$

Transformata Fourier a excitatiei $e(t)$ este:

```
> E:=F[dir](e,t,omega);
```

$$E := A0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + w0) + \pi \text{Dirac}(\omega + w0))$$

Transformata Fourier a excitatie $y(t)$ este:

> $\mathbf{Y:=H*E;}$

$$Y := -\frac{\omega^2 A_0 (\pi \text{Dirac}(-\omega + \omega_0) + \pi \text{Dirac}(\omega + \omega_0))}{-\omega^2 + 2 I \alpha \omega + \omega_0^2}$$

Raspunsul $y(t)$ al circuitului la excitatia $e(t)$ este:

> $\mathbf{y:=simplify(normal(convert(F[inv](Y,omega,t),trig),expanded));}$

$$y := \frac{A_0 \omega_0^2 (\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - 2 \alpha \omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t))}{\omega_0^4 - 2 \omega_0^2 \omega_0^2 + 4 \alpha^2 \omega_0^2 + \omega_0^4}$$

Raspunsul la semnal armonic de frecventa egala cu frecventa de rezonanta a filtrului

Se calculeaza raspunsul circuitului la frecventa egala cu frecventa de taiere a filtrului:

> $\mathbf{e1:=eval(e,w0=omega0);}$

$$e1 := A_0 \cos(\omega_0 t)$$

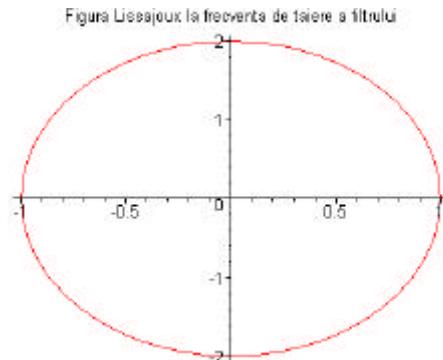
> $\mathbf{y1:=simplify(eval(y,w0=omega0));}$

$$y1 := -\frac{1}{2} \frac{A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)}{\alpha}$$

> $\mathbf{plot(eval([e1,y1],[alpha=0.25,omega0=1,A0=1]),t=-3*Pi..3*Pi,title="Formele de unda la frecventa de taiere a filtrului");}$

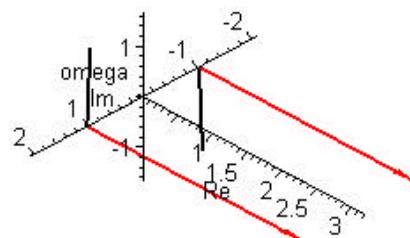


> $\mathbf{plot(eval([e1,y1,t=-Pi..Pi],[alpha=0.25,omega0=1,A0=1]),title="Figura Lissajoux la frecventa de taiere a filtrului");}$



> $\mathbf{INTERFACE_PLOT3D(rpa(eval(E,[A0=1,alpha=0.25,omega0=1,w0=1.03]),omega,interval=2..2.2,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1,alpha=1,omega0=1,w0=1.03]),omega,interval=2..2.2,culoare=[0,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));$

Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)



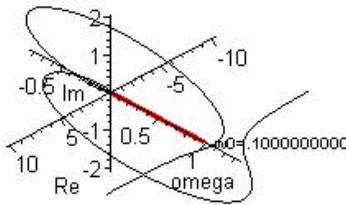
Reprezentare animata a comportarii de regim permanent

In figura de mai jos este data reprezentarea semnalelor de intrare si iesire pentru cazul particular $A0 = 1$ si $\alpha = 1$.

```
> wd:=evalf([seq(10^(i/10),i=-10..10)]):
>
INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([CURVES(op(op(plot(eval(e,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=
wd[i]]),t=-
Pi..Pi))[1])[1],COLOR(RGB,1,0,0)),CURVES(op(op(plot(eval(y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=w
d[i]]),t=-
Pi..Pi))[1])[1],COLOR(RGB,0,0,0)),TEXT([2,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETICA,8
))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("t","e(t),y(t)'),TITLE("Forma de unda a semnalelor excitatie (rosu)
si raspuns (negru)"));

>
INTERFACE_PLOT(ANIMATE(seq([op(plot([eval(e,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),eval(y,
[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),t=-
Pi/wd[i]..Pi/wd[i],color=black))[1],TEXT([0.2,0.2],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVETIC
A,8))),i=1..nops(wd))),AXESLABELS("e(t)","y(t)'),TITLE("Figura Lissajoux"));

>
INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([rpa(eval(E,[A0=1/Pi,omega0=1,alpha=0.25,w0=wd[i]]),omega,
interval=-
10..10,culoare=[1,0,0]),rpa(eval(Y,[A0=1/Pi,alpha=0.25,omega0=1,w0=wd[i]]),omega,interval=-
10..10,culoare=[0,0,0]),op(PLOTH)[1],TEXT([0,1,1,0],cat("w0=",convert(wd[i],string)),FONT(HELVET
ICA,8),COLOR(RGB,0,0,0))],i=1..nops(wd))),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),
TITLE("Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)"));
Spectrele semnalelor excitatie (rosu) si raspuns (negru)
```



Probleme. Intrebări

1. Ce tip de simetrie are modulul functiei de transfer in regim permanent?
2. Ce tip de simetrie are argumentul functiei de transfer in regim permanent?
3. Refaceti calculele si reprezentarile grafice pentru un filtru trece tot de ordin I si de ordin II.
4. Refaceti calculele si reprezentarile grafice pentru urmatoarele functii de transfer:

- $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}$
- $H(s) = \frac{s(s+100)}{(s+1)(s+1000)}$

Semnale cu modulatie de amplitudine

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
Semnal modulator armonic	2
Cazul $m < 1$ (submodulatie)	3
Cazul $m = 1$ (modulatie 100%)	4
Cazul $m > 1$ (supramodulatie)	5
Cazul $m = \infty$ (MAPS)	6
Semnal modulator dreptunghiular	7
Semnal modulator periodic dreptunghiular	8
Probleme. Intrebari.....	9

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

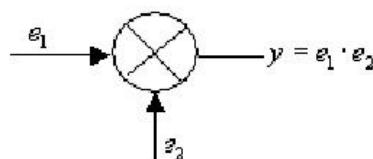
Familiarizarea cu formele de unda ale unui semnal cu modulatie in amplitudine. Calcularea si reprezentarea spectrului semnalului MA.

Rezumat teoretic:

Modulatia in **amplitudine** a unui purtator armonic este procesul de transferare a caracteristicilor semnalului modulator asupra amplitudinii semnalului purtator. Din punct de vedere matematic, cea mai simpla modulatia in amplitudine este modulatia de produs.

Presupunem semnalul modulator de forma $sm(t)$ avand transformata Fourier $Sm(\omega)$ iar semnalul purtator $sp(t)$ avand spectrul $Sp(\omega)$. Semnalul MA este definit de relatia $sMA(t) = sm(t) sp(t)$, adica produsul celor doua semnale. Vom nota cu $SMA(\omega)$, spectrul semnalului MA.

Principial, realizarea semnalului $sMA(t)$ consta in utilizarea unui multiplicator ideal descris de pe intrarile caruia se aplica semnalul modulator si respectiv purtator:



In functie de domeniul de valori pentru care sunt construite, multiplicatoarele fizice sunt in patru cadrane (ambele intrari pot avea orice polaritate), in doua cadrane (numai una dintre intrari accepta semnale de orice polaritate) si in un singur cadran (ambele intrari trebuie sa aiba o singura polaritate).

```
> restart:with(inttrans):assume(wm<wp):
> addtable(fourier,sm(t),Sm(omega),t,omega):
> addtable(fourier,sp(t),Sp(omega),t,omega):
> SMA:=(t)->k*sm(t)*sp(t):
> SMA:=(omega)->fourier(sMA(t),t,omega):
> sMA(t);
k sm(t) sp(t)
```

In acest caz, spectrul semnalului MA este de forma:

```
> SMA(omega);
```

$$\frac{1}{2} \frac{k \int_{-\infty}^{\infty} Sm(-U1) Sp(\omega - U1) d_U1}{\pi}$$

Semnale cu modulatie de amplitudine

In ce ce urmeaza, vom considera ca purtatoarea este semnal armonic:

> **sp:=(t)->Ap*cos(wp*t);**

$$sp := t \rightarrow Ap \cos(wp t)$$

avand spectrul:

> **SMA(omega);**

$$k Ap \left(\frac{1}{2} \text{Sm}(\omega - wp) + \frac{1}{2} \text{Sm}(\omega + wp) \right)$$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru calcularea transformatiei Fourier a unor semnale:

- functia **FOURIER**

[help](#)

Pentru trunchierea unor serii:

- functia **ts**

[help](#)

Pentru reprezentarea spectrelor unor semnale:

- functia **rpa**

[help](#)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlab",libname;
> F:=FOURIER;
> assume(wm<wp);
> Sm:=(omega)->F(sm(t),t,omega);
> Sp:=(omega)->F(sp(t),t,omega);
> sMA:=(t)->k*sm(t)*sp(t);
> SMA:=(omega)->F(sMA(t),t,omega);
```

Exemple

Peste tot in cele ce urmeaza vom considera ca semnalul purtator este armonic:

> **sp:=(t)->Ap*cos(wp*t);**

$$sp := t \rightarrow Ap \cos(wp t)$$

Semnal modulator armonic

Vom presupune in consideratiile ce urmeaza ca semnalul modulator este armonic pe frecventa **wm**, avand si o componenta continua **A0**:

> **sm:=(t)->A0+Am*cos(wm*t+phi);**

$$sm := t \rightarrow A0 + Am \cos(wm t + \phi)$$

Raportul dintre amplitudinea componentei altenative si componenta continua ale semnalului modulator poarta numele de indice de modulatie in amplitudine si noteaza cu **m**. Putem scrie asadar ca:

> **A0:=Am/m;**

$$A0 := \frac{Am}{m}$$

Cu aceste notatii, semnalul modulator este:

> **sm(t);**

$$\frac{Am}{m} + Am \cos(wm t + \phi)$$

, iar spectrul sau este de forma:

> **Sm(omega);**

$$2 \frac{Am \pi \text{Dirac}(\omega)}{m} + Am (\text{e}^{(I\phi)} \pi \text{Dirac}(-\omega + wm) + \text{e}^{(-I\phi)} \pi \text{Dirac}(\omega + wm))$$

Semnalul MA este de forma:

> **sMA(t);**

$$k \left(\frac{Am}{m} + Am \cos(wm t + \phi) \right) Ap \cos(wp t)$$

, iar spectrul sau este de forma:

> **SMA(omega);**

$$k Ap Am \left(\pi \text{Dirac}(-\omega + wp) + \pi \text{Dirac}(\omega + wp) + \frac{1}{2} m e^{(I\phi)} \pi \text{Dirac}(-\omega + wm + wp) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m e^{(I\phi)} \pi \text{Dirac}(-\omega + wm - wp) + \frac{1}{2} m e^{(-I\phi)} \pi \text{Dirac}(\omega - wp + wm) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m e^{(-I\phi)} \pi \text{Dirac}(\omega + wm + wp) \right) m$$

Figura Lissajoux care se obtine pe ecranul osciloscopului aplicand pe xOsc (CHANNEL1) semnalul modulator si yOsc (CHANNEL2) semnalul MA este de forma unei armonici incadrate de un trapez cu marimea bazei mici b si marimea bazei bazei mari B , date de relatiile:

> **b:=2*Amin;B:=2*Amax;**

$$b := 2 Amin$$

$$B := 2 Amax$$

unde $Amin$ si $Amax$ sunt valorile minima si maxima ale semnalului modulator date de relatiile:

> **Amin:=A0-Am;Amax:=A0+Am;**

$$Amin := \frac{Am}{m} - Am$$

$$Amax := \frac{Am}{m} + Am$$

Inlocuind in expresiile lui b si B , se obtine urmatoarea expresie pentru raportul $\frac{b}{B}$:

> **simplify(b/B);**

$$-\frac{-1 + m}{1 + m}$$

Vom particulariza in cele ce urmeaza amplitudinea si pulsatia semnalelor modulator si purtator si vom discuta influenta indicelui de modulatie asupra semnalului MA:

> **k:=1;Ap:=1;wp:=10;Am:=1;wm:=1;phi:=Pi/4;**

In functie de valoarea indicelui de modulatie exista mai multe situatii:

Cazul $m < 1$ (submodulatie)

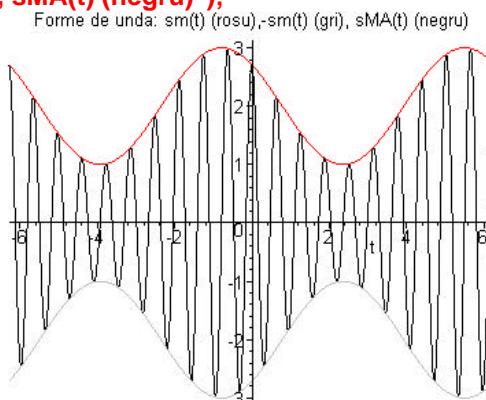
In acest caz componenta continua a semnalului modulator este mai mare decat componenta alternativa a semnalului ($Am < A0$). Reprezentarile grafice s-au obtinut pentru:

> **m:=0.5;**

dar concluziile sunt valabile pentru orice valoare $m < 1$.

Forma de unda a semnalului MA este cuprinsa intre o anvelopa superioara data de $sm(t)$ si o anvelopa inferioara data de $-sm(t)$.

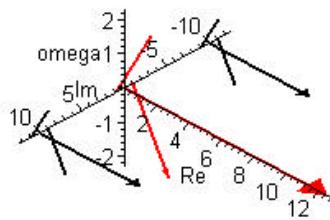
> **plot([sm(t),-sm(t),sMA(t)],t=-2*Pi..2*Pi,numpoints=400,color=[red,gray,black],linestyle=[1,1,1],labels=["t",""],title="Forme de unda: sm(t) (rosu), -sm(t) (gri), sMA(t) (negru)");**



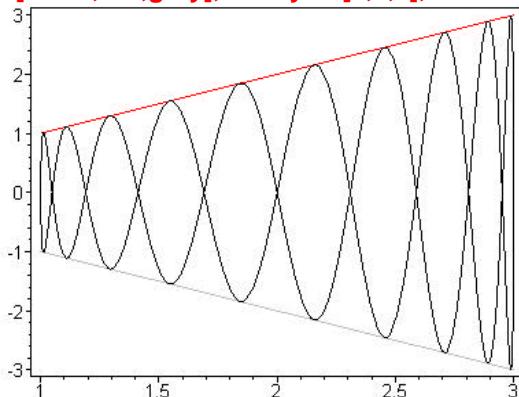
Spectrele semnalului MA se obtine printr-o translare cu wp si $-wp$ a spectrului semnalului modulator.

> **PLOT3D(rpa(SMA(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[0,0,0]),rpa(Sm(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectre: Sm(omega) (rosu), SMA(omega) (negru)"));**

Spectre: Sm(omega) (rosu), SMA(omega) (negru)



```
> plot([[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1]),eval(sMA(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1]),t=-Pi..Pi],[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1]),eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1]),t=-Pi..Pi],[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1]),eval(-sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1]),t=-Pi..Pi]],numpoints=100,color=[black,red,gray],linestyle=[1,1,1],axes=box);
```



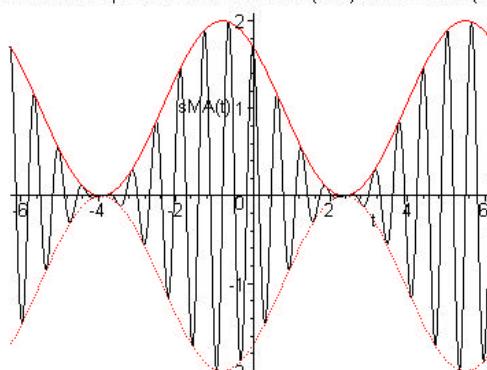
Cazul m=1 (modulatie 100%)

> $m := 1$:

In acest caz forma de unda si spectrul sunt ca in figura de mai jos pentru un defazaj intre semnale $\phi = \frac{\pi}{4}$.

```
> plot([sm(t),-sm(t),sMA(t)],t=-2*Pi..2*Pi,numpoints=100,color=[red,red,black],linestyle=[1,2,1],labels=["t","sMA(t)"],title="Forme de unda pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)");
```

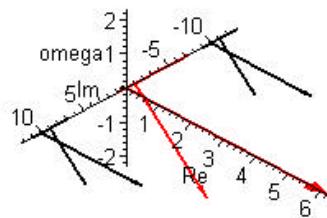
Forme de unda pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)



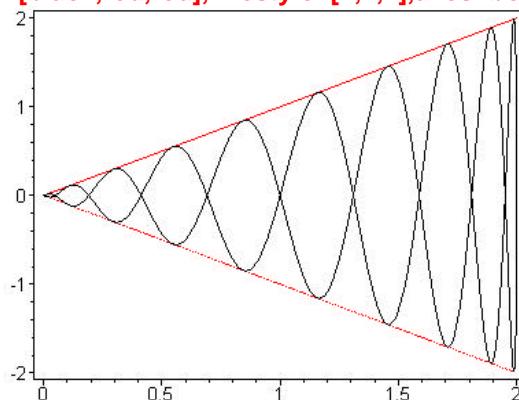
Spectrele semnalului modulator si al semnalului MA sunt date in figura de mai jos:

```
> PLOT3D(rpa(SMA(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=12..12,culoare=[0,0,0]),rpa(Sm(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=12..12,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectre pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)"));
```

Spectre pentru $m < 1$: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)



```
>
plot([[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=1,wm=1,phi=Pi/4]),eval(sMA(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=1,wm=1,phi=Pi/4]),t=-Pi..Pi],[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1,phi=Pi/4]),eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1,phi=Pi/4]),t=-Pi..Pi],[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1,phi=Pi/4)],-eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,Am=1,m=0.5,wm=1,phi=Pi/4]),t=-Pi..Pi]],numpoints=200,color=[black,red,red],linestyle=[1,1,2],axes=box);
```

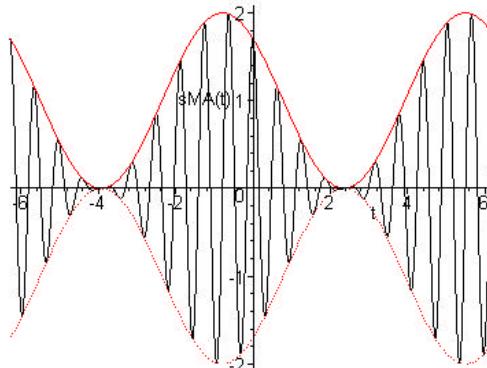


Cazul $m > 1$ (supramodulatie)

In acest caz forma de unda si spectrul sunt ca in figura de mai jos pentru un defazaj intre semnale $\phi = \frac{\pi}{4}$.

```
>
plot([eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=1.5,wm=1,phi=Pi/4]),eval(-sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=1.5,wm=1,phi=Pi/4]),eval(sMA(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=1.5,wm=1,phi=Pi/4]),t=-2*Pi..2*Pi,numpoints=100,color=[red,red,black],linestyle=[1,2,1],labels=["t", "sMA(t)"],title="Forme de unda pentru m>1: modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)");
```

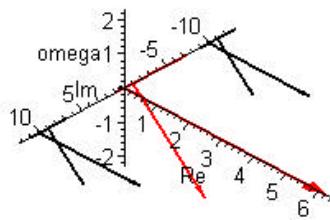
Forme de unda pentru $m > 1$: modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)



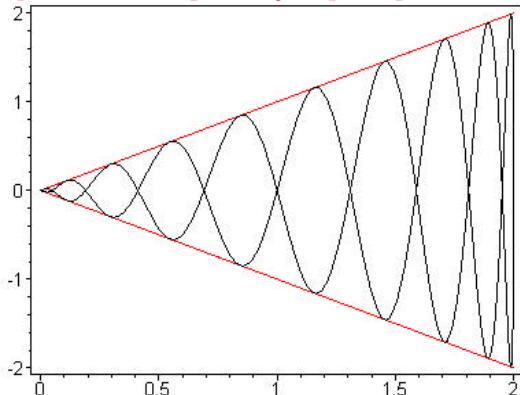
Spectrele semnalului modulator si al semnalului MA sunt date in figura de mai jos:

```
> PLOT3D(rpa(SMA(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[0,0,0]),rpa(Sm(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega", "Re", "Im"),TITLE("Spectre pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)"));
```

Spectre pentru $m < 1$: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)



```
> plot([[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=2,wm=1,phi=Pi/4]),eval(sMA(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=2,wm=1,phi=Pi/4]),t=-Pi..Pi],[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=2,wm=1,phi=Pi/4]),eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=2,wm=1,phi=Pi/4]),t=-Pi..Pi],[eval(sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=2,wm=1,phi=Pi/4]),eval(-sm(t),[Ap=1,wp=10,A0=1,m=2,wm=1,phi=Pi/4]),t=-Pi..Pi]],numpoints=100,color=[black,red,red],linestyle=[1,1,1],axes=box);
```



Cazul $m = \infty$ (MAPS)

In acest caz componenta continua a semnalului este nula:

```
> m:=infinity;
```

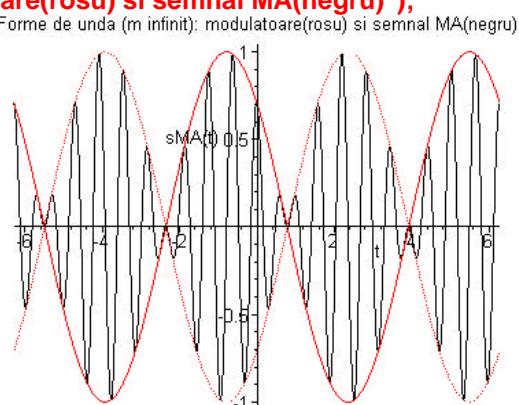
$$m := \infty$$

> A0;

0

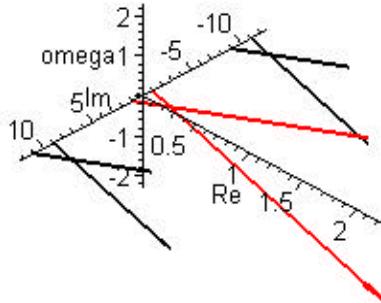
In acest caz forma de unda a semnalului MA este ca in figura de mai jos:

```
> plot([eval(sm(t)],[Ap=1,wp=10,A0=1,m=1.5,wm=1,phi=Pi/4]),eval(-sm(t) ,[Ap=1,wp=10,A0=1,m=1.5,wm=1,phi=Pi/4]),eval(sMA(t) ,[Ap=1,wp=10,A0=1,m=1.5,wm=1,phi=Pi/4])),t=-2*Pi..2*Pi,numpoints=100,color=[red,red,black],linestyle=[1,2,1],labels=["t","sMA(t)"],title="Forme de unda (m infinit): modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)":
```



```
> PLOT3D(rpa(SMA(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[0,0,0]), rpa(Sm(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectre pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)"));
```

Spectre pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)



```
> unassign('k','Ap','wp','Am','wm','m');
```

Semnal modulator dreptunghiular

In acest semnal modulator este de forma:

```
> sm:=(t)>Am*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));  
sm := t → Am (Heaviside(t) − Heaviside(t − τ))
```

Spectrul semnalului modulator este:

```
> Sm(omega):simplify(%);
```

$$\frac{IAm(-1 + e^{(-I\tau\omega)})}{\omega}$$

Semnalul MA este de forma:

```
> SMA(t);
```

$$kAm(\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))Ap \cos(wp t)$$

Spectrul semnalului MA este de forma:

```
> SMA(omega);
```

$$kAmAp \left(\frac{1}{4} \frac{2\pi^2 \text{Dirac}(\omega - wp) + \frac{-2I\pi}{\omega - wp}}{\pi} + \frac{1}{4} \left(2\pi^2 \text{Dirac}(\omega + wp) + \frac{-2I\pi}{\omega + wp} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{e^{(-I\tau\omega)} e^{(Iwp\tau)} \left(2\pi^2 \text{Dirac}(\omega - wp) + \frac{-2I\pi}{\omega - wp} \right)}{\pi} - \frac{1}{4} \frac{e^{(-I\tau\omega)} e^{(-Iwp\tau)} \left(2\pi^2 \text{Dirac}(\omega + wp) + \frac{-2I\pi}{\omega + wp} \right)}{\pi} \right)$$

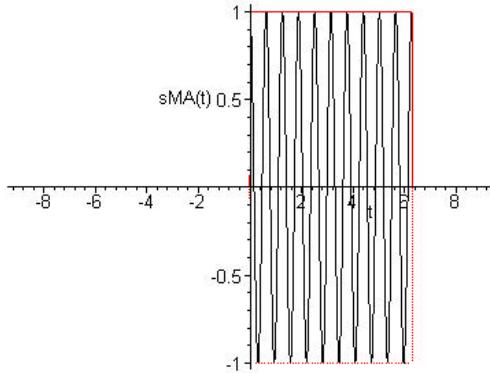
Pentru obtinerea reprezentarilor grafice dam valori numerice constantelor care intervin in expresiile semnalelor:

```
> k:=1:Ap:=1:wp:=10:Am:=1:tau:=2*Pi:
```

```
> plot([sm(t),-sm(t),SMA(t)],t=-3*Pi..3*Pi,numpoints=100, color=[red,red,black], linestyle=[1,2,1], labels=["t","SMA(t)"],title="Forme de unda (m infinit): modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)");
```

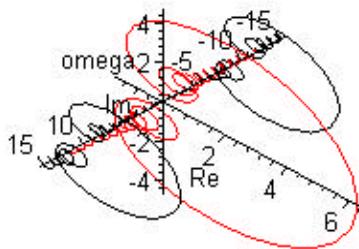
Semnale cu modulatie de amplitudine

Forme de unda (m infinit): modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)



> PLOT3D(rpa(SMA(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-15..15,culoare=[0,0,0]),rpa(Sm(omega),omega,tipgrafic=D3,interval=-12..12,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL), AXESLABELS("omega", "Re", "Im"), TITLE("Spectre (m infinit): modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)"));

Spectre (m infinit): modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)



> unassign('k','Ap','wp','Am','tau');

Semnal modulator periodic dreptunghiular

In acest semnalul modulator este de forma:

> smg:=(t)->Am*(Heaviside(t)-Heaviside(t-tau));

$$smg := t \rightarrow Am (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

> sm:=(t)->sum(smg(t-n*2*Pi/wm),`n`=-infinity..infinity);

$$sm := t \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} smg\left(t - \frac{2n\pi}{wm}\right)$$

Spectrul semnalului modulator este:

> Sm(omega);

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-I \text{Dirac}(-\omega + nwm)}{n} + \frac{I e^{(-2I\pi nwm)}}{n} \text{Dirac}(-\omega + nwm) \right)$$

Semnalul MA este in acest caz de forma:

> sMA(t);

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\text{Heaviside}\left(t - \frac{2n\pi}{wm}\right) - \text{Heaviside}\left(t - \frac{2n\pi}{wm} - 2\pi\right) \right) \right) \cos(10t)$$

Spectrul semnalului modulator este de forma:

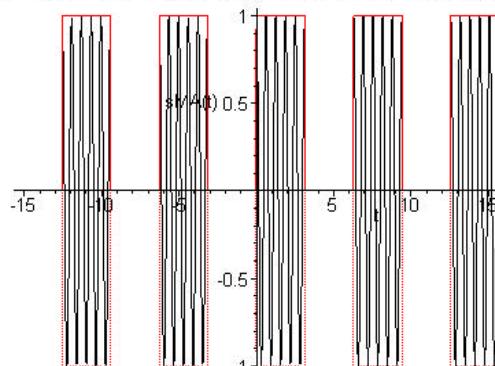
> SMA(omega);

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-I \text{Dirac}(-\omega + 10 + nwm)}{n} + \frac{I e^{(-2I\pi nwm)}}{n} \text{Dirac}(-\omega + 10 + nwm) \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-I \text{Dirac}(-\omega - 10 + nwm)}{n} + \frac{I e^{(-2I\pi nwm)}}{n} \text{Dirac}(-\omega - 10 + nwm) \right) \right) \end{aligned}$$

Pentru obtinerea reprezentarilor grafice dam valori constantelor care intervin in expresiile semanlelor:

```
> k:=1:Ap:=1:wp:=10:Am:=1:tau:=Pi:wm:=1:  
>plot([ts(sm(t),-5.5),ts(-sm(t),-5.5),ts(sMA(t),-5.5)],t=-  
5*Pi..5*Pi,numpoints=200,color=[red,red,black],linestyle=[1,2,1],labels=["t","sMA(t)"],title="Forme  
de unda (m infinit): modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)");
```

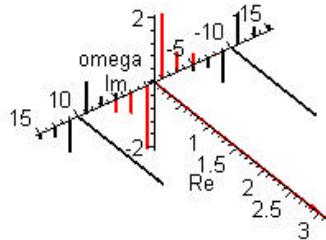
Forme de unda (m infinit): modulatoare(rosu) si semnal MA(negru)



Semnalul MA este de forma:

```
>PLOT3D(rpa(ts(SMA(omega),-5.5),omega,tipgrafic=D3,interval=-  
15..15,culoare=[0,0,0]),rpa(ts(Sm(omega),-5.5),omega,tipgrafic=D3,interval=-  
12..12,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL),AXESLABELS("omega","Re","Im"),TITLE("Spectre  
pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)"));
```

Spectre pentru m<1: modulatoare(rosu) si semnalul MA(negru)



```
> unassign('k','Ap','wp','Am','tau','wm');
```

Probleme. Intrebari

Sa se reprezinte forma de unda a unui semnal MA cu purtatoare armonica si semnal modulator de tipul:

- puls triunghiular (simetric, respectiv nesimetric)
- semnal periodic provenit dintr-un puls triunghiular (simetric, respectiv nesimetric)

Sa se calculeze si sa se reprezinte grafic spectrul unui semnal MA cu purtatoare armonica si semnal modulator de tipul:

- puls triunghiular (simetric, respectiv nesimetric)
- semnal periodic provenit dintr-un puls triunghiular (simetric, respectiv nesimetric)

Reprezentarea fazoriala a semnalelor MA

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Modulatie in amplitudine = modificarea amplitudinii semnalului purtator	1
Reprezentarea fazoriala pentru indice de modulatie m=0.5	2
Reprezentarea fazoriala pentru indice de modulatie m=2	3

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Reprezentarea sub forma fazoriala. Comparatie intre semnalul MA si semnalul purtator.

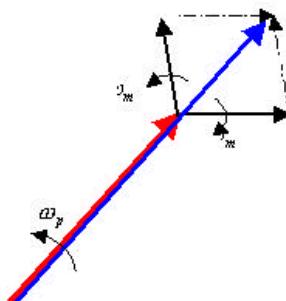
Rezumat teoretic:

Se considera semnalul MA cu purtatoare de amplitudina A_0 si pulsatie ω_p modulat cu semnal armonic de pulsatie ω_m avind indice de modulatie m .

> restart;

> $sMA:=(t)\rightarrow A_0(1+mMA\cos(\omega_m t))\cos(\omega_p t);$
 $sMA := t \rightarrow A_0(1 + mMA \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t)$

Consideram in reprezentarea fazoriala componentele spectrale si deducem fazorul resultant ca o sumare vectoriala.

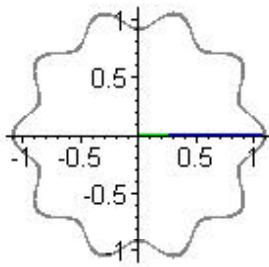


Modulatie in amplitudine = modificarea amplitudinii semnalului purtator

Reprezentarea se face 3D in coordonate {t, Re, Im} dar pentru a urmari reprezentarea fazoriala intereseaza doar {Re, Im} si nu intereseaza axa timp.

```
> restart;
> sRE:=(t)\rightarrow A_0*(1+mMA\cos(\omega_M*t))\cos(\omega_P*t); sIM:=(t)\rightarrow
A_0*(1+mMA\cos(\omega_M*t))\sin(\omega_P*t);
> CURVES_MA:=CURVES( op(op(plots[spacecurve]),
eval([t,sRE(t),sIM(t)], [A0=1,omegaP=2*Pi*100,omegaM=2*Pi*1000,mMA=0.1]),
t=0..0.2,numpoints=1000)), COLOR(RGB,0.5,0.5,0.5),LINESTYLE(1)): PLOT3D(CURVES_MA):
> FAZOR_MA:=CURVES(evalf(eval([[t,sRE(t),sIM(t)],[t,0,0]], [A0=1,omegaP=2*Pi*100,
omegaM=2*Pi*1000, mMA=0.1])),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,0,1)):
PLOT3D(eval(FAZOR_MA,t = 2));
> FAZOR_REF:=CURVES(evalf(eval([[t,0.25*A0\cos(\omega_P*t),0.25*A0\sin(\omega_P*t)],
[t,0,0]], [A0=1,omegaP=2*Pi*100])),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,1,0)):
> tstep:=0.0001:N:=200:tes:=[seq(n*tstep,n=0..N)]:
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MA,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MA],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Modificarea amplitudinii semnalului purtator")));
```

Modificarea amplitudinii semnalului purtator



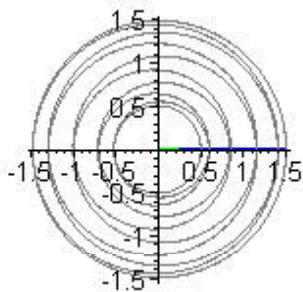
Pentru a intelege esenta modulatiei de amplitudine (modificarea amplitudinii purtatoarei conform unui semnal modulator) s-a considerat o frecventa a semnalului modulator de 10 ori mai mare decit frecventa semnalului purtator. Cei doi fazori, cel corespunzator semnalului purtator si cel corespunzator semnalului sunt in nefazati deoarece cele doua semnale au pulsatia instantanee egala si constanta. Se observa modificarea amplitudinii fazorului in timpul unei perioade.

Reprezentarea fazoriala pentru indice de modulatie m=0.5

```
> restart;
> sRE:=(t)->A0*(1+mMA*cos(omegaM*t))*cos(omegaP*t): sIM:=(t)-
>A0*(1+mMA*cos(omegaM*t))*sin(omegaP*t):
> CURVES_MA:=CURVES( op(op(plots[spacecurve][
eval([t,sRE(t),sIM(t)],A0=1,omegaP=2*Pi*100,omegaM=2*Pi*10,mMA=0.5]),
t=0..0.2,numpoints=1000))), COLOR(RGB,0.5,0.5,0.5),LINESTYLE(1)): PLOT3D(CURVES_MA):
> FAZOR_MA:=CURVES(evalf(eval([[t,sRE(t),sIM(t)],t,0,0]],A0=1,omegaP=2*Pi*100,
omegaM=2*Pi*10,mMA=0.5)),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,0,1)):PLOT3D(eval(FAZ
OR_MA,t = 2)):
> FAZOR_REF:=CURVES(evalf(eval([[t,0.25*A0*cos(omegaP*t),0.25*A0*sin(omegaP*t)],
[t,0,0]],A0=1,omegaP=2*Pi*100))),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,1,0)):
> tstep:=0.001:N:=200:tes:=[seq(n*tstep,n=0..N)]:
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MA,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MA],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=0.5")));

```

Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=0.5

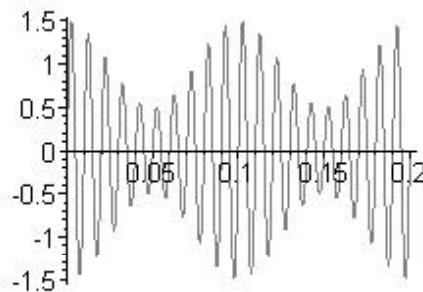


S-a reprezentat sub forma fazoriala semnalul MA (albastru) si drept referinta un fazor de de pulsatie ω_p (verde).

```
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MA,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MA],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL), SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=0.5")));

```

Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=0.5



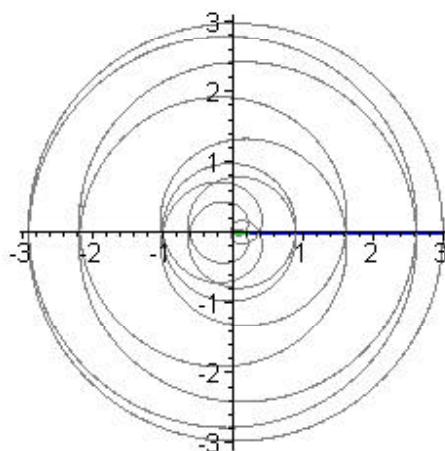
Reprezentarea fazoriala pentru indice de modulatie m=2

```

> restart;
> sRE:=(t)->A0*(1+mMA*cos(omegaM*t))*cos(omegaP*t); sIM:=(t)-> A0*(1+mMA* cos(omegaM*t))*sin(omegaP*t);
> CURVES_MA:=CURVES( op(op(plots[spacecurve])( eval([t,sRE(t),sIM(t)], [A0=1,
omegaP=2*Pi*100, omegaM=2*Pi*10,mMA=2]), t=0..0.2,numpoints=1000))), COLOR(
RGB,0.5,0.5,0.5), LINESTYLE(1)); PLOT3D(CURVES_MA);
> FAZOR_MA:=CURVES(evalf(eval([[t,sRE(t),sIM(t)],t,0,0]], [A0=1,omegaP=2*Pi*100,
omegaM=2*Pi*10, mMA=2])),LINESTYLE(1), THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,0,1));
PLOT3D(eval(FAZOR_MA,t = 2));
> FAZOR_REF:=CURVES(evalf(eval([[t,0.25*A0*cos(omegaP*t),0.25*A0*sin(omegaP*t)],
[t,0,0]], [A0=1,omegaP=2*Pi*100])),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,1,0));
> tstep:=0.001:N:=200:tes:=[seq(n*tstep,n=0..N)];
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MA,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MA],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=2")));

```

Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=2

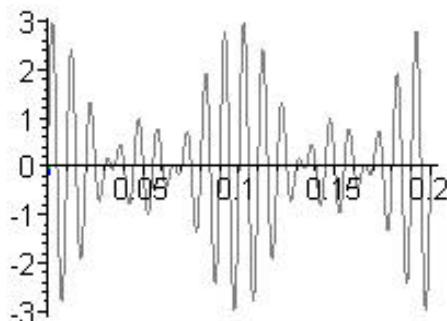


Reprezentarea fazoriala a semnalelor MA

Pentru indice de modulatie $m = 2$ se pune in evidenta supramodulatia cind fazorul semnalului MA si fazorul semnalului de referinta ajung in opozitie de faza.

```
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MA,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MA],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL), SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=2")));
```

Reprezentarea fazoriala pentru sMA(t) cu m=2



Semnale cu modulatie de frecventa sau faza

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Modulatia de frecventa (MF)	1
Semnal modulator armonic.....	1
Forma de unda a semnalelor MF cu modulatoare armonica	2
Spectrul semnalelor MF cu modulatoare armonica	2
Modulatia de faza (MP)	3
Semnal modulator armonic.....	3
Forma de unda a semnalelor MP cu modulatoare armonica.....	4
Spectrul semnalelor MP cu modulatoare armonica	4
Mod de lucru	5
Exemple	6
Exemplul I	6
Exemplul II	8
Probleme.....	9

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Familiarizarea cu formele de unda ale unui semnal cu modulatie in frecventa. Calcularea si reprezentarea spectrului semnalului MF

Rezumat teoretic:

Modulatia in general este un proces de grefare a informatiei continute de semnalul util (modulator) de frecventa joasa pe un semnal purtator de frecventa ridicata, semnalul obtinut in urma unui proces de modulatie numindu-se semnal modulat. In cazul in care semnalul modulator influenteaza frecventa sau faza semnalului purtator, procesul corespunde **modulatiei de frecventa**, respectiv **modulatiei de faza**.

Modulatia de frecventa (MF)

Acest proces presupune in esenta grefarea semnalului modulator pe frecventa instantanee a unei purtatoare.

Daca $p(t) = A_0 \cos(\omega_p t)$ si $m(t)$ este semnalul modulator, semnalul MF este de forma

$$s_{MF}(t) = A_0 \cos(\phi_i(t)), \text{ unde } \phi_i(t) = \int \omega_i(t) dt, \text{ iar frecventa instantanee } \omega_i(t) \text{ este de forma:}$$

$\omega_i(t) = \omega_p t + Kf m(t)$. Asadar semnalul MF este de forma:

$$s_{MF}(t) = A_0 \cos(\omega_p t + Kf \int m(t) dt).$$

Tratarea semnalelor MF | MP, incazul modulatoarelor oarecare este in general dificila. Din acest motiv, in continuare se prezinta in detaliu cazul modulatoarei armonice.

Semnal modulator armonic

Pentru semnal modulator $m(t)$ este de forma $m(t) = Am \cos(\omega_m t)$, ceea ce conduce la urmatoarea expresie pentru semnalul MF:

$$s_{MF}(t) = Ap \cos\left(\omega_p t + Kf Am \int \cos(\omega_m t) dt\right), \text{ adica} \\ s_{MF}(t) = Ap \cos\left(\omega_p t + \frac{Kf Am \sin(\omega_m t)}{\omega_m} + \phi_0\right), \text{ unde constanta de integrare } \phi_0 \text{ are semnificatia fazei initiale a semnalului MF.}$$

In expresia anterioara se introduce notatiile:

$\Delta(\omega) = Kf Am$, pentru **deviatia maxima de frecventa** a semnalului MF.

$$\beta = \frac{Kf Am}{\omega_m}, \text{ pentru } \text{indicele de modulatie in frecventa.}$$

In aceste conditii, expresia semnalului MF cu modulatoare armonica este:
 $s_{MF}(t) = A_p \cos(\omega_p t + \beta \sin(\omega_m t))$ (pentru $\phi_0 = 0$).

Forma de unda a semnalelor MF cu modulatoare armonica

Forma de unda a unui semnal MF este:

> restart;

> libname:=".SCSlib",libname;

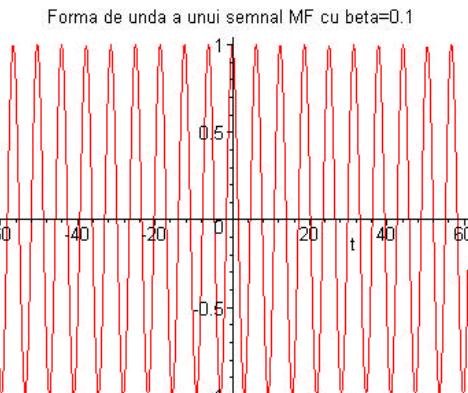
> assume(_wm,positive):assume(_wp,positive):assume(_k,integer);

Fie semnalul MF de forma:

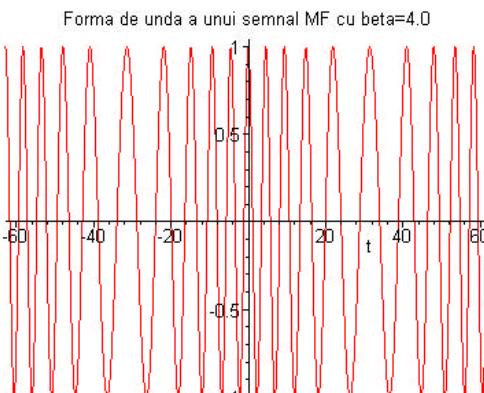
> sMF:=Ap*cos(wp*t+beta*sin(wm*t));

Ne propunem sa reprezentam acest semnal in doua cazuri particulare semnificative: $\beta = .1$ si $\beta = 4.0$. Celelalte marimi au urmatoarele valori: $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

> plot(eval(sMF,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,beta=0.2]),t=-20*Pi..20*Pi,title="Forma de unda a unui semnal MF cu beta=0.1");



> plot(eval(sMF,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,beta=4.0]),t=-20*Pi..20*Pi,title="Forma de unda a unui semnal MF cu beta=4.0");



Din graficele anterioare se observa ca variația frecvenței instantanee a semnalului MF este cu atât mai mare cu cat indicele de modulatie β este mai mare.

Spectrul semnalelor MF cu modulatoare armonica

Spectrul semnalelor MF se calculeaza folosind descompunerea in serie Fourier complexa a echivalentului de joasa frecventa al semnalului MF.

Semnalul analitic corespunzator semnalului MF este de forma:

> sa:=Ap*exp(I*wp*t+I*beta*sin(wm*t));

Echivalentul de joasa frecventa al semnalului MF se defineste cu relatia:

> sj:=simplify(sa*exp(-I*wp*t));

$$sj := Ap e^{(I\beta \sin(wm t))}$$

Dupa cum se poate observa, echivalentul de joasa frecventa este un semnal periodic deci se poate descompune in serie Fourier complexa. Aceasta descompunere este de forma:

> sj:=cs(sj);

$$sj := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, \beta) e^{(Ikwm t)} \right)$$

Semnalul analitic rezulta de forma:

> sa:=sj*exp(I*wp*t);

$$sa := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, \beta) e^{(Ikwm)t} \right) e^{(Iwp)t}$$

Semnalul MF reprezinta partea reala a semnalului analitic. Ca urmare, decscompunerea spectrala a semnalului MF este de forma:

> **sMF:=cs(sMF);**

$$sMF := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, \beta) \cos(wp t + kwm t) \right)$$

Din expresia anterioara deducem ca spectrul semnalului MF este de forma:

> **SMF:=subs({_wm=wm,_wp=wp,_k=k},FOURIER(subs([wm=_wm,wp=_wp,k=_k],sMF),t,omega));**

$$SMF := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\text{BesselJ}(k, \beta) \pi \text{Dirac}(\omega - wp - km k) + \text{BesselJ}(k, \beta) \pi \text{Dirac}(\omega + wp + km k)) \right)$$

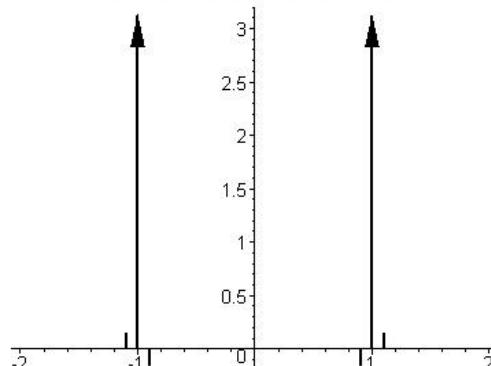
Se observa ca spectrul semnalului MF este real. In functie de valoarea indicelui de modulatie β , banda semnalului MF se modifica, iar semnalele MF se clasifica din acest punct de vedere in:

- semnale MF de *banda ingusta*: astfel de semnale se obtin pentru $\beta < .4$ expresia benzii in acest caz fiind data de relatia $B = 2wm$
- semnale MF de *banda larga*: astfel de semnale se obtin pentru $1.0 < \beta$ expresia benzii in acest caz fiind data de relatia $B = 2wm(1 + \beta + \sqrt{\beta})$

Reprezentarea grafica a acestuia este data mai jos pentru doua situatii particulare semnificative: $\beta = .1$ (semnal MF de banda ingusta) si $\beta = 4.0$ (semnal MF de banda larga). Celelalte marimi au valorile: $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

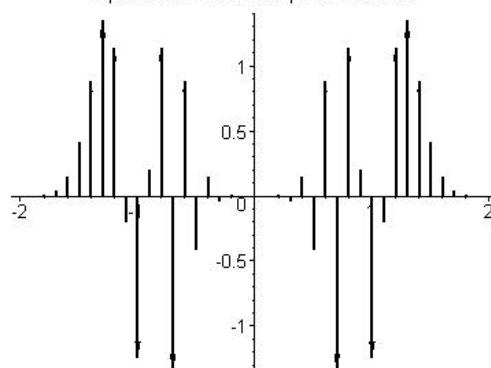
> **PLOT(rpa(ts(eval(evalf(SMF)),[Ap=1,wp=1,wm=0.1,beta=0.1]),k=-10..10),omega,interval=-2..2,tipgrafic=real),TITLE("Spectrul semnalului MF pentru beta=0.1");**

Spectrul semnalului MF pentru beta=0.1



> **PLOT(rpa(ts(eval(evalf(SMF)),[Ap=1,wp=1,wm=0.1,beta=4.0]),k=-10..10),omega,interval=-2..2,tipgrafic=real),TITLE("Spectrul semnalului MF pentru beta=4.0");**

Spectrul semnalului MF pentru beta=4.0



Modulatia de faza (MP)

Acest proces presupune in esenta grefarea semnalului modulator pe faza instantanee a unei purtatoare. Daca $p(t) = Ap \cos(\omega_p t)$ si $m(t)$ este semnalul modulator, semnalul MP este de forma $s_{MP}(t) = A_0 \cos(\phi_i(t))$, unde $\phi_i(t) = \omega_p t + Kp m(t)$, unde Kp este o constanta. Asadar semnalul MF este de forma: $s_{MP}(t) = Ap \cos(\omega_p t + Kp m(t))$.

Semnal modulator armonic

Semnale cu modulatie de frecventa sau faza

Pentru semnal modulator $m(t)$ este de forma $m(t) = Am \sin(\omega_m t)$, ceea ce conduce la urmatoarea expresie pentru semnalul MF: $s_{MP}(t) = Ap \cos(\omega_p t + Kp Am \sin(\omega_m t))$.

In expresia anterioara se introduce notatiile:

$\Delta(\omega) = Kp Am \omega_m$, pentru **deviatia maxima de frecventa** a semnalului MP.

$\alpha = Kp$, pentru **indicele de modulatie in faza**.

In aceste conditii, expresia semnalului MP cu modulatoare armonica este: $s_{MP}(t) = A_p \cos(\omega_p t + \alpha \sin(\omega_m t))$ (pentru $\phi_0 = 0$).

Forma de unda a semnalelor MP cu modulatoare armonica

Forma de unda a unui semnal MF este:

> **restart**:

> **libname:="../SCSlib",libname:**

> **assume(_wm,positive):assume(_wp,positive):assume(_k,integer);**

Fie semnalul MP de forma:

> **sMP:=Ap*cos(wp*t+alpha*sin(wm*t));**

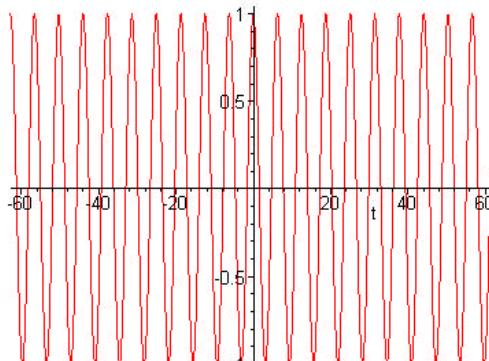
$$sMP := Ap \cos(wp t + \alpha \sin(wm t))$$

Ne propunem sa reprezentam acest semnal in doua cazuri particulare semnificative: $\alpha = .1$ si $\alpha = 4.0$.

Celelalte marimi au urmatoarele valori: $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

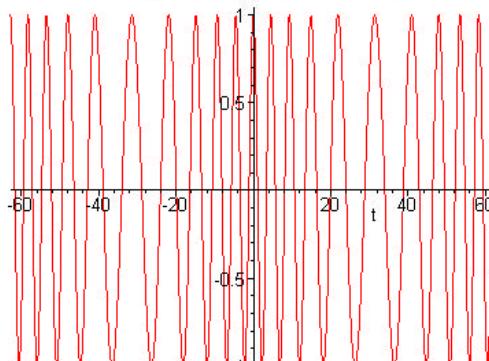
> **plot(eval(sMP,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,alpha=0.1]),t=-20*Pi..20*Pi,title="Forma de unda a unui semnal MP cu alpha=0.1");**

Forma de unda a unui semnal MP cu alpha=0.1



> **plot(eval(sMP,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,alpha=4.0]),t=-20*Pi..20*Pi,title="Forma de unda a unui semnal MP cu alpha=4.0");**

Forma de unda a unui semnal MP cu alpha=4.0



Din graficele anterioare se observa ca variația frecvenței instantanee a semnalului MP este cu atât mai mare cu cat indicele de modulatie α este mai mare.

Spectrul semnalelor MP cu modulatoare armonica

Spectrul semnalelor MP se calculeaza folosind descompunerea in serie Fourier complexa a echivalentului de joasa frecventa al semnalului MP.

Semnalul analitic corespunzator semnalului MP este de forma:

> **sa:=Ap*exp(I*wp*t+I*alpha*sin(wm*t));**

Echivalentul de joasa frecventa al semnalului MP se defineste cu relatia:

> **sj:=simplify(sa*exp(-I*wp*t));**

$$sj := Ap e^{(I \alpha \sin(wm t))}$$

Dupa cum se poate observa, echivalentul de joasa frecventa este un semnal periodic deci se poate descompune in serie Fourier complexa. Aceasta descompunere este de forma:

> **sj:=cs(sj);**

$$sj := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, \alpha) e^{(Ikwm)t} \right)$$

Semnalul analitic rezulta de forma:

> **sa:=sj*exp(I*wp*t);**

$$sa := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, \alpha) e^{(Ikwm)t} \right) e^{(Iwp)t}$$

Semnalul MP reprezinta partea reala a semnalului analitic. Ca urmare, descompunerea spectrala a semnalului MP este de forma:

> **sMP:=cs(sMP);**

$$sMP := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, \alpha) \cos(wp t + kwm t) \right)$$

Din expresia anterioara deducem ca spectrul semnalului MP este de forma:

> **SMP:=subs({_wm=wm,_wp=wp,_k=k},FOURIER(subs([wm=_wm,wp=_wp,k=_k],sMP),t,omega));**

$$SMP := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\text{BesselJ}(k, \alpha) \pi \text{Dirac}(\omega - wp - wm k) + \text{BesselJ}(k, \alpha) \pi \text{Dirac}(\omega + wp + wm k)) \right)$$

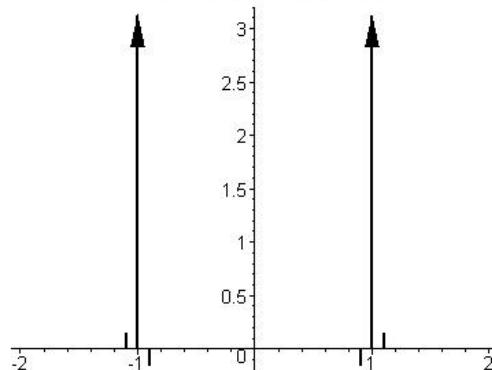
Se observa ca spectrul semnalului MP este real. In functie de valoarea indicelui de modulatie α , banda semnalului MP se modifica, iar semnalele MP se clasifica din acest punct de vedere in:

- semnale MP de *banda ingusta*: astfel de semnale se obtin pentru $\alpha < .4$ expresia benzii in acest caz fiind data de relatia $B = 2wm$
- semnale MP de *banda larga*: astfel de semnale se obtin pentru $1.0 < \alpha$ expresia benzii in acest caz fiind data de relatia $B = 2wm(1 + \alpha + \sqrt{\alpha})$

Reprezentarea grafica a acestuia este data mai jos pentru doua situatii particulare semnificative: $\alpha = .1$ (semnal MP de banda ingusta) si $\alpha = 4.0$ (semnal MP de banda larga). Celelalte marimi au valorile: $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

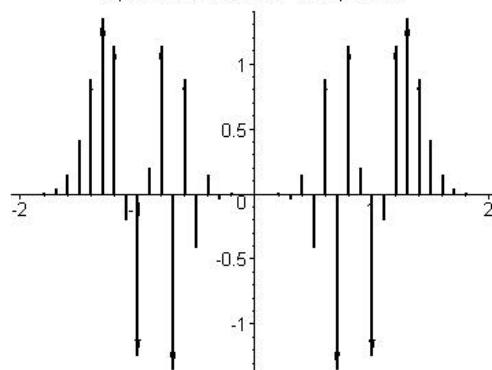
> **PLOT(rpa(ts(eval(SMP,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,alpha=0.1]),k=-10..10),omega,interval=-2..2,tipgrafic=real),TITLE("Spectrul semnalului MP cu alpha=0.1"));**

Spectrul semnalului MP cu alpha=0.1



> **PLOT(rpa(ts(eval(SMP,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,alpha=4.0]),k=-10..10),omega,interval=-2..2,tipgrafic=real),TITLE("Spectrul semnalului MP cu alpha=4.0"));**

Spectrul semnalului MP cu alpha=4.0



Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru calcularea transformatiei Fourier a unor semnale:

- functia **FOURIER** [help](#)

Pentru trunchierea unor serii:

- functia **ts** [help](#)

Pentru reprezentarea spectrelor unor semnale:

- functia **rpa** [help](#)

> **restart**:

> **libname:="..../SCSlab",libname:**

> **assume(_wm,positive):assume(_wp,positive):assume(_k,integer);**

Exemple

Exemplul I

Ne pronem sa analizam forma de unda si spectrul semnalului MF | MP de forma:

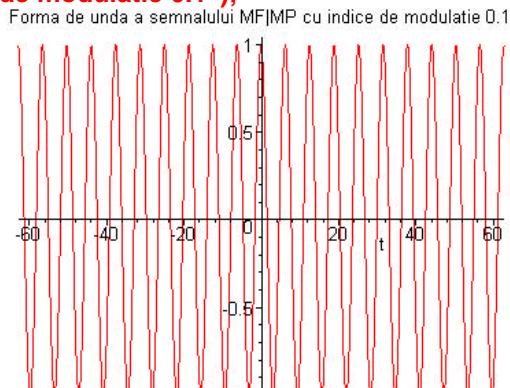
> **s:=Ap*cos(wp*t+im*sin(wm*t+phi));**

$$s := Ap \cos(wp t + im \sin(wm t + \phi))$$

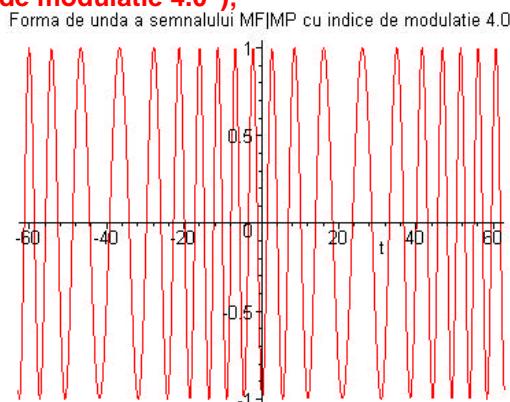
unde *im* este indicele de modulatie (β pentru MF sau α pentru MP).

Forma de unda a semnalului MF | MP anterior este data mai jos pentru o valoare a defazajului $\phi = \frac{\pi}{4}$ in doua situatii particulare semnificative $im = .1$ (semnal de banda ingusta) si $im = 4.0$ (semnal de banda larga). Celelalte marimi au urmatoarele valori $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

> **plot(eval(s,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,im=0.1,phi=Pi/4]),t=-20*Pi..20*Pi,title="Forma de unda a semnalului MF|MP cu indice de modulatie 0.1");**



> **plot(eval(s,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,im=4.0,phi=Pi/4]),t=-20*Pi..20*Pi,title="Forma de unda a semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0");**



Spectrul semnalului MF | MP anterior se obtine utilizand descompunerea in serie armonica a acestuia:

> **s:=cs(s);**

$$s := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, im) \cos(wp t + k(wm t + \phi)) \right)$$

Spectrul acestui semnal rezulta de forma:

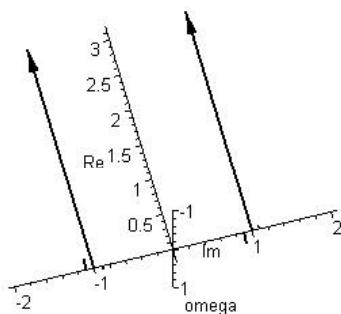
$$> \text{S} := \text{subs}([\underline{\text{wm}}=\text{wm}, \underline{\text{wp}}=\text{wp}, \underline{\text{k}}=\text{k}], \text{FOURIER}(\text{subs}([\text{wm}=\underline{\text{wm}}, \text{wp}=\underline{\text{wp}}, \text{k}=\underline{\text{k}}], \text{s}), \text{t}, \omega));$$

$$\begin{aligned} S := A_p \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} & (\text{BesselJ}(k, im) \cos(k \phi) \pi \text{Dirac}(\omega - wp - k \text{wm}) \right. \\ & + \text{BesselJ}(k, im) \cos(k \phi) \pi \text{Dirac}(\omega + wp + k \text{wm}) + I \text{BesselJ}(k, im) \sin(k \phi) \pi \text{Dirac}(\omega - wp - k \text{wm}) \\ & \left. - I \text{BesselJ}(k, im) \sin(k \phi) \pi \text{Dirac}(\omega + wp + k \text{wm}) \right) \end{aligned}$$

Se observa ca in general spectrul acestui semnalul MF | MP este complex (are atat parte reala nenula cat si parte imaginara nenula). Mai jos s-a reprezentat acest spectru pentru o valoare a defazajului $\phi = \frac{\pi}{4}$ in doua situatii semnificative: $im = .1$ (semnal de banda ingusta) si $im = 4.0$ (semnal de banda larga). Celelalte marimi au valorile: $A_p = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

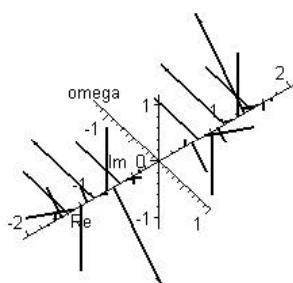
> **PLOT3D(rpa(ts(eval(S,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,im=0.1,phi=Pi/4]),k=-10..10),omega,interval=2..2,tipgrafic=D3),TITLE("Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 0.1"),AXESLABELS("omega","Re","Im"),AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(CONSTRAINED),VIEW(DEFAULT,DEFAULT,-1..1));**

Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 0.1



> **PLOT3D(rpa(ts(eval(S,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,im=4.0,phi=Pi/4]),k=-10..10),omega,interval=2..2,tipgrafic=D3),TITLE("Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0"),AXESLABELS("omega","Re","Im"),AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(CONSTRAINED));**

Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0



Observatie. Spre deosebire de situatia clasica cand defazajul este nul ($\phi = 0$), componentelete spectrale sunt acum defazate suplimentar cu multipli intregi ai lui ϕ . Altfel spus, componenta spectrala de ordin k este defazata suplimentar cu $k\phi$.

Exemplul II

Ne prouнем sa analizam forma de unda si spectrul semnalului MF | MP de forma:

> $s := Ap \cos(wp t + \phi + im \sin(wm t))$

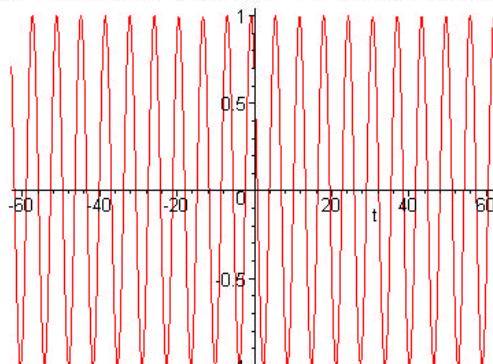
$$s := Ap \cos(wp t + \phi + im \sin(wm t))$$

unde im este indicele de modulatie (β pentru MF sau α pentru MP).

Forma de unda a semnalului MF | MP anterior este data mai jos pentru o valoare a defazajului $\phi = \frac{\pi}{4}$ in doua situatii particulare semnificative $im = .1$ (semnal de banda ingusta) si $im = 4.0$ (semnal de banda larga). Celealte marimi au urmatoarele valori $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

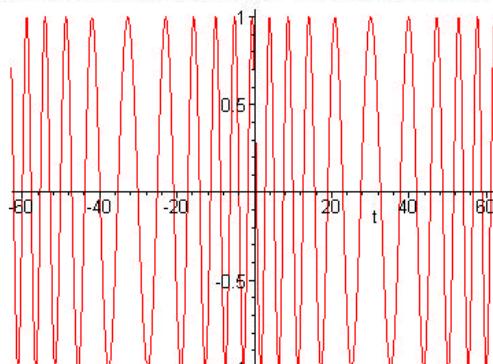
> $\text{plot}(\text{eval}(s, [Ap=1, wp=1, wm=0.1, im=0.1, phi=Pi/4]), t=-20*Pi..20*Pi, \text{title}=\text{"Forma de unda a semnalului MF|MP cu indice de modulatie 0.1"});$

Forma de unda a semnalului MF|MP cu indice de modulatie 0.1



> $\text{plot}(\text{eval}(s, [Ap=1, wp=1, wm=0.1, im=4.0, phi=Pi/4]), t=-20*Pi..20*Pi, \text{title}=\text{"Forma de unda a semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0"});$

Forma de unda a semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0



Spectrul semnalului MF | MP anterior se obtine utilizand descompunerea in serie armonica a acestuia:
> $s := \text{cs}(s);$

$$s := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{BesselJ}(k, im) \cos(wp t + \phi + kwm t) \right)$$

Spectrul acestui semnal rezulta de forma:

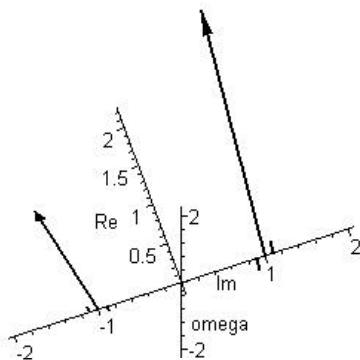
> $\text{S} := \text{subs}([_wm=wm, _wp=wp, _k=k], \text{FOURIER}(\text{subs}([_wm=_wm, _wp=_wp, _k=_k], s), t, \omega));$

$$\begin{aligned} S := Ap \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} & (\text{BesselJ}(k, im) \cos(\phi) \pi \text{Dirac}(\omega - wp - kwm) \right. \\ & + \text{BesselJ}(k, im) \cos(\phi) \pi \text{Dirac}(\omega + wp + kwm) + I \text{BesselJ}(k, im) \sin(\phi) \pi \text{Dirac}(\omega - wp - kwm) \\ & \left. - I \text{BesselJ}(k, im) \sin(\phi) \pi \text{Dirac}(\omega + wp + kwm) \right) \end{aligned}$$

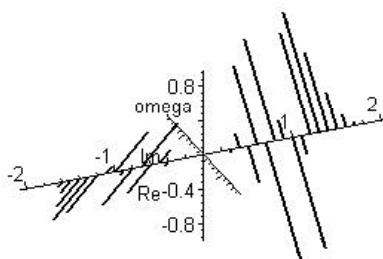
Se observa ca in general spectrul acestui semnal MF | MP este complex (are atat parte reala nenua cat si parte imaginara nenua). Mai jos s-a reprezentat acest spectru pentru o valoare a defazajului $\phi = \frac{\pi}{4}$ in doua situatii semnificative: $im = .1$ (semnal de banda ingusta) si $im = 4.0$ (semnal de banda larga). Celelete marimi au valorile: $Ap = 1$, $wp = 1$, $wm = .1$.

> $\text{PLOT3D}(\text{rpa}(\text{ts}(\text{eval}(S, [Ap=1, wp=1, wm=0.1, im=0.1, phi=Pi/4]), k=-10..10), \omega, \text{interval}=[2..2, \text{tipgrafic}=D3], \text{TITLE}(\text{"Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie } 0.1\text{"}), \text{AXESLABELS}(\text{"}\omega\text{"}, \text{"Re"}, \text{"Im"}), \text{AXESTYLE(NORMAL)}, \text{SCALING(CONSTRAINED)});$

Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 0.1



```
> PLOT3D(rpa(ts(eval(S,[Ap=1,wp=1,wm=0.1,im=4.0,phi=Pi/4]),k=-10..10),omega,interval=-2..2,tipgrafic=D3),TITLE("Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0"),AXESLABELS("omega","Re","Im"),AXESTYLE(NORMAL),SCALING(CONSTRAINED));
Spectrul semnalului MF|MP cu indice de modulatie 4.0
```



Observatie. Spre deosebire de situatia clasica cand defazajul este nul ($\phi = 0$), componentelete spectrale sunt acum defazate suplimentar cu ϕ . Altfel spus, fiecare componenta spectrala este defazata suplimentar cu acelasi defazaj ϕ . (spre deosebire de exemplul anterior unde defazajul crestea cu ordinul componenteitei spectrale).

Probleme. Intrebari

Pentru semnalele MF/MP de mai jos cere sa se reprezinte grafic forma de unda, sa se calculeze si sa se reprezinte grafic spectrul acestor semnale:

```
> sMF:=Ap*sin(wp*t+beta*sin(wm*t)): sMP:=Ap*sin(wp*t+alpha*sin(wm*t));
> sMF:=Ap*cos(wp*t+beta*cos(wm*t)): sMP:=Ap*cos(wp*t+alpha*cos(wm*t));
> sMF:=-Ap*sin(wp*t+beta*sin(wm*t)): sMP:=-Ap*sin(wp*t+alpha*sin(wm*t));
> sMF:=Ap*sin(wp*t-beta*sin(wm*t)): sMP:=Ap*sin(wp*t-alpha*sin(wm*t));
```

Pentru reprezentarile grafice se vor utiliza urmatoarele valori numerice: $wp = 1$, $wm = .1$, $\beta = 4.0$, $\alpha = .1$.

Reprezentarea fazoriala a semnalelor MF

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Modulatie in frecventa/faza = modificarea frecventei/fazei instantanee a semnalului purtator	1
Reprezentarea fazoriala pentru indice de modulatie beta=10	2

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Reprezentarea sub forma fazoriala. Comparatie intre semnalul MF/MP si semnalul purtator.

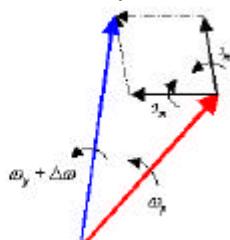
Rezumat teoretic:

Se considera semnalul MF cu purtatoare de amplitudina A_0 si pulsatie ω_p modulat cu semnal armonic de pulsatie ω_m avind indice de modulatie β .

> restart;

> $sMF := (t) \rightarrow A_0 \cos(\omega_p t + \beta \sin(\omega_m t))$

Consideram in reprezentarea fazoriala componente spectrale si deducem fazorul resultant ca o sumare vectoriala. Din spectrul semnalului consideram importante numai doua linii spectrale laterale iar restul le neglijam. Aproximarea este valabila in cazul unui indice de modulatie $\beta < .4$. Pentru indici de modulatie mai mari, in spectru se retin mai multe linii spectrale si compunerea fazoriala se modifica corespunzator.



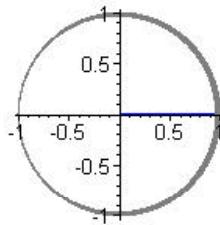
Modulatie in frecventa/faza = modificarea frecventei/fazei instantanee a semnalului purtator

Reprezentarea se face 3D in coordonate $\{t, Re, Im\}$ dar pentru a urmari reprezentarea fazoriala intereseaza doar $\{Re, Im\}$ si nu intereseaza axa timp.

```
> restart;
> sRE:=(t)->A0*cos(omegaP*t+beta*sin(omegaM*t)); sIM:=(t)-
>A0*sin(omegaP*t+beta*sin(omegaM*t));
> CURVES_MF:=CURVES( op(op(plots[spacecurve]( eval([t,sRE(t),sIM(t)],
[A0=1,omegaP=2*Pi*1000, omegaM=2*Pi*1000,beta=1]), t=0..0.2,numpoints=4000)),
COLOR(RGB,0.5,0.5,0.5),LINESTYLE(1)): PLOT3D(CURVES_MF);
> FAZOR_MF:=CURVES(evalf(eval([[t,sRE(t),sIM(t)], [t,0,0]], [A0=1,omegaP=2*Pi*1000,
omegaM=2*Pi*1000,beta=1])),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,0,1)):PLOT3D(eval(FAZ
OR_MF,t = 2));
> FAZOR_REF:=CURVES(evalf(eval([[t,0.25*A0*cos(omegaP*t),0.25*A0*sin(omegaP*t)],
[t,0,0],[A0=1,omegaP=2*Pi*1000]]),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,1,0));
> tstep:=0.00001:N:=200:tes:=[seq(n*tstep,n=0..N)];
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MF,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MF],i=1..nops(tes))));
,AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(UNCONSTRAINED),TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru
sMF(t) cu beta=10")));
```

Reprezentarea fazoriala a semnalelor MF

Reprezentarea fazoriala pentru sMF(t) cu beta=10

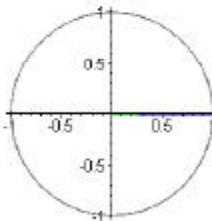


Pentru a intelege esenta modulatiei de frecventa (modificarea frecventei instantaneee a purtatoarei conform unui semnal modulator) s-a considerat o frecventa a semnalului modulator de 10 ori mai mare decit frecventa semnalului purtator si un indice de modulatie $\beta = 1$. Intre cei doi fazori, cel corespunzator semnalului purtator si cel corespunzator semnalui modulat apare un defezaj variabil in timp.

Reprezentarea fazoriala pentru indice de modulatie beta=10

```
> restart;
> sRE:=(t)->A0*cos(omegaP*t+beta*sin(omegaM*t)): sIM:=(t)-
>A0*sin(omegaP*t+beta*sin(omegaM*t)):
> CURVES_MF:=CURVES( op(op(plots[spacecurve][
eval([[t,sRE(t),sIM(t)], [A0=1,omegaP=2*Pi*100,omegaM=2*Pi*10,beta=10]],
t=0..0.2,numpoints=1000))), COLOR(RGB,0.5,0.5,0.5),LINESTYLE(1)): PLOT3D(CURVES_MA):
> FAZOR_MF:=CURVES(evalf(eval([[t,sRE(t),sIM(t)], [t,0,0]], [A0=1,omegaP=2*Pi*100,
omegaM=2*Pi*10,beta=10])),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,0,1)):PLOT3D(eval(FAZO
R_MA,t = 2)):
> FAZOR_REF:=CURVES(evalf(eval([[t,0.25*A0*cos(omegaP*t),0.25*A0*sin(omegaP*t)],
[t,0,0],[A0=1,omegaP=2*Pi*100]]),LINESTYLE(1),THICKNESS(2),COLOR(RGB,0,1,0)):
> tstep:=0.001:N:=200:tes:=[seq(n*tstep,n=0..N)]:
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MF,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MF],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru sMF(t) cu beta=10")));
```

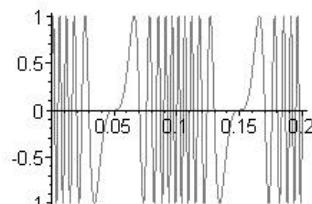
Reprezentarea fazoriala pentru sMF(t) cu beta=10



S-a reprezentat sub forma fazoriala semnalul MF (albastru) si drept referinta un fazor de pulsatie ω_p (verde).

```
> INTERFACE_PLOT3D(ANIMATE(seq([eval(FAZOR_MF,t=tes[i]), eval(FAZOR_REF,t=tes[i]),
CURVES_MF],i=1..nops(tes))), AXESSTYLE(NORMAL),SCALING(UNCONSTRAINED),
TITLE(cat("Reprezentarea fazoriala pentru sMF(t) cu beta=10")));
```

Reprezentarea fazoriala pentru sMF(t) cu beta=10



Studiul stabilitatii circuitelor liniare cu reactie

folosind criteriul Nyquist

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Teorema Cauchy	1
Conturul Nyquist	2
Mod de lucru	3
Exemple	3
Exemplul I	3
Reactie negativa	4
Reactie pozitiva	5
Exemplul II	6
Reactie negativa	7
Reactie pozitiva	9
Probleme. Intrebari.....	10

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Familiarizarea cu criteriul Nyquist de analiza a stabilitatii sistemelor liniare cu reactie.

Rezumat teoretic:

In esenta, criteriul de analiza a stabilitatii are la baza teorema Cauchy, enuntata mai jos.

Teorema Cauchy

Fie $F : C \rightarrow \mathbb{C}$ o fractie rationala cu coeficienti complecsi, si C un contur inchis in planul complex, care nu trece prin nici un pol sau zero al functiei $F(s)$. Daca conturul C contine in interiorul sau Z zerouri si P poli ai functiei F , atunci cand s se parurge conturul **Cauchy** in sens orar, hodograful functiei $F(s)$ inconjoara originea de $Z - P$ ori in acelasi sens.

Sa consideram acum un sistem cu reactie avand functia de transfer:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - \varepsilon K A(s) B(s)},$$

unde $\varepsilon = 1$ pentru reactie pozitiva si $\varepsilon = -1$ pentru reactie negativa.

Notam cu $H_d(s)$ functia de transfer in bucla deschisa:

$$H_d(s) = K A(s) B(s),$$

putem exprima functia de transfer a sistemului cu reactie sub forma:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - \varepsilon H_d(s)}.$$

Stabilitatea sistemului cu reactie este data de pozitia in planul complex a polilor functiei de transfer $H_r(s)$. Pentru studiul stabilitati sistemului cu reactie la modificarea amplificarii K se urmareste determinarea legaturii dintre numarul de poli din semiplanul drept ale functiei $H_r(s)$ si valoarea lui K , folosind teorema Cauchy.

In acest scop se noteaza cu $F(s)$ numitorul functiei $H_r(s)$:

$$F(s) = 1 - \varepsilon H_d(s).$$

Obs. Avand in vedere legatura dintre $H_r(s)$ si $F(s)$, respectiv legatura dintre $F(s)$ si $H_d(s)$, putem spune ca polii functiei $F(s)$ sunt polii functiei de transfer in bucla deschisa, $H_d(s)$, respectiv zerourile functiei $F(s)$ sunt polii functiei de transfer a sistemului cu reactie, $H_r(s)$.

Se considera un contur inchis in planul complex s care sa contine toti polii si toate zerourile din

semiplanul drept ale functiei $F(s)$, dar care sa nu contine polii functiei $F(s)$ situati pe axa imaginara. Un astfel de contur se numeste **conturul Nyquist**.

Conturul Nyquist

Conturul Nyquist este un contur inchis ce inconjoara semiplanul drept al planului complex in sens orar si este format din:

- axa imaginara pentru $\omega = -\infty \dots \infty$ mai putin in apropierea polilor de pe axa imaginara care sunt ocoliti fiecare cu un semicerc de raza r_0 ($r_0 \rightarrow 0$) cu centru in polul de pe axa imaginara, semicerc situat in semiplanul drept
- conturul se inchide cu un semicerc in semiplanul drept de raza R_0 ($R_0 \rightarrow \infty$) centrat in origine.

Practic, alegerea valorilor R_0 si r_0 se face in felul urmator:

- R_0 trebuie sa fie mult mai mare decat modulul tuturor singularitatilor functiei $F(s)$, ($R_0 \rightarrow \infty$).
- r_0 trebuie sa fie mult mai mic decat distanta dintre oricare doua singularitati distincte ale functiei $F(s)$, ($r_0 \rightarrow 0$).

Notam:

- P numarul de poli ai functiei $F(s)$ din semiplanul drept;
- Z numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$.

Se alege un sens de referinta de exemplu sensul orar. Se noteaza cu N numarul de inconjururi pe care le face hodograful functiei $F(s)$ in jurul originii in sensul de referinta fixat, atunci cand s parcurge o singura data conturul Nyquist in acelasi sens. Dar numarul de inconjururi pe care le face hodograful lui $F(s)$ in jurul originii este acelasi cu numarul de inconjururi pe care le face hodograful lui $Hd(s)$ in jurul punctului $\frac{1}{\varepsilon}$, adica $-1 + I_0$ (-1,0) pentru reactie negativa sau $1 + I_0$ (1,0) pentru reactie pozitiva.

Hodograful functiei de transfer $Hd(s)$, cand s parcurge conturul Nyquist se numeste **diagrama Nyquist**.

Avand in vedere teorema Cauchy, $N = Z - P$, deci $Z = N + P$.

Obs. Avand in vedere legatura dintre $Hr(s)$ si $F(s)$, respectiv legatura dintre $F(s)$ si $Hd(s)$, putem spune ca P reprezinta numarul de poli din semiplanul drept ai functiei de transfer in bucla deschis, $Hd(s)$, iar Z reprezinta numarul de poli din semiplanul drept ai functiei de transfer a sistemului cu reactie, $Hr(s)$.

Criteriul de stabilitate Nyquist

Un sistem cu reactie este stabil daca diagrama Nyquist inconjura punctul de referinta $(-1,0)$ pentru reactie negativa, $(+1,0)$ pentru reactie pozitiva) de P ori in sens antiorar, atunci cand s parcurge o singura data in sens orar conturul Nyquist.

Expresia matematica a criteriului de stabilitate Nyquist este $N = -P$ si este echivalenta cu conditia $Z = 0$ (sistemul cu reactie sa nu aiba poli in semiplanul drept, adica sa fie stabil).

Trasarea diagramei Nyquist pleaca in principiu de la diagrama polară a functiei $Hd(I\omega)$, deoarece o parte a conturului Nyquist (cea mai semnificativa) este situata pe axa imaginara. Diagrama Nyquist este simetrica fata de axa reala deoarece conturul Nyquist este simetric fata de axa reala si $Hd(\bar{s}) = \overline{(Hd(s))}$ pentru orice s complex (pentru sisteme realizabile practic functia $Hd(s)$ are coeficienti reali).

Studiul stabilitatii sistemului cu reactie la variatia amplificarii utilizand criteriul Nyquist.

In principiu se pleaca de la diagrama Nyquist trasata pentru amplificare K unitara. Daca se modifica valoarea amplificarii, modulul functiei $Hd(s)$ se rescaleaza cu valoarea K , dar argumentul ramane neschimbat. Din acest motiv alura diagramei Nyquist ramane neschimbata dar se contracta sau se dilata dupa cum $K < 1$ sau $1 < K$. Acest lucru face posibila deducerea numarului de inconjururi N (in jurul punctului de referinta), la diferite valori ale amplificarii, din pozitia relativa a punctului de referinta in rapport cu diagrama Nyquist trasata pentru amplificare unitara.

In functie de caracterul sistemului la variatia amplificarii se poate face urmatoarea clasificare:

- un sistem este **conditionat stabil** sau **conditionat instabil** daca exista doua valori K_1 si K_2 ($0 < K_1$, $0 < K_2$), astfel incat sistemul cu reactie este stabil pentru $K = K_1$ si instabil pentru $K = K_2$.

- un sistem este **neconditonat stabil** daca pentru orice valoare K ($0 < K$) a amplificarii sistemul cu reactie este stabil
- un sistem este **neconditonat instabil** daca pentru orice valoare K ($0 < K$) a amplificarii sistemul cu reactie este instabil.

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru trasarea diagramei polare a functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **Bode[polara]** [help](#)

Pentru reprezentarea conturului si diagramei Nyquist corespunzatoare unui sistem cu reactie:

- functia **Nyquist[contur]** [help](#)
- functia **Nyquist[diagram]** [help](#)

Pe parcursul lucrarii, vom folosi urmatoarele notatii:

- $Hd(s)$ pentru functia de transfer in bucla deschisa a sistemului cu reactie
- K pentru amplificare (intervine in expresia lui $Hd(s)$)

> **restart:**

> **libname:="..../SCSlab",libname:**

Exemple

Ne propunem studiul stabilitatii unor sisteme cu reactie la variatia amplificarii. Se porneste de la functia de transfer in bucla deschisa.

Exemplul I

Fie un sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa este:

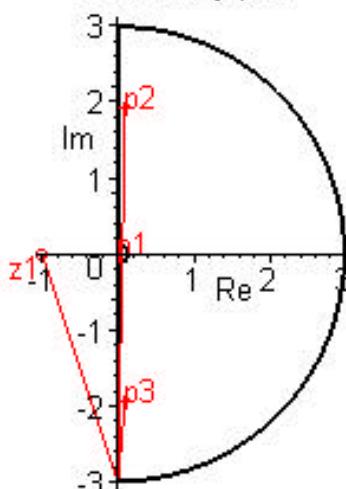
> **Hd:=K*(s+1)/(s*(s^2-s+100));**

Exista un pol in origine care va fi ocolit de catre conturul Nyquist si alti doi poli complex conjugati situati in semiplanul drept, poli care vor fi in interiorul conturului.

Reprezentarea diagramei poli zerouri a functiei de transfer in bucla deschisa si a conturului Nyquist:

> **Nyquist[contur](eval(Hd,K=1),repere=[-1,1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**

Conturul Nyquist



Functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$ are 2 poli in semiplanul drept, deci $P = 2$.

Diagrama polara a functiei de transfer $Hd(j\omega)$ ($\omega = 0 \dots \infty$) este reprezentata mai jos:

> **Bode[polara](eval(Hd,K=1),compresie=[4,1]);**

Diagrama polara

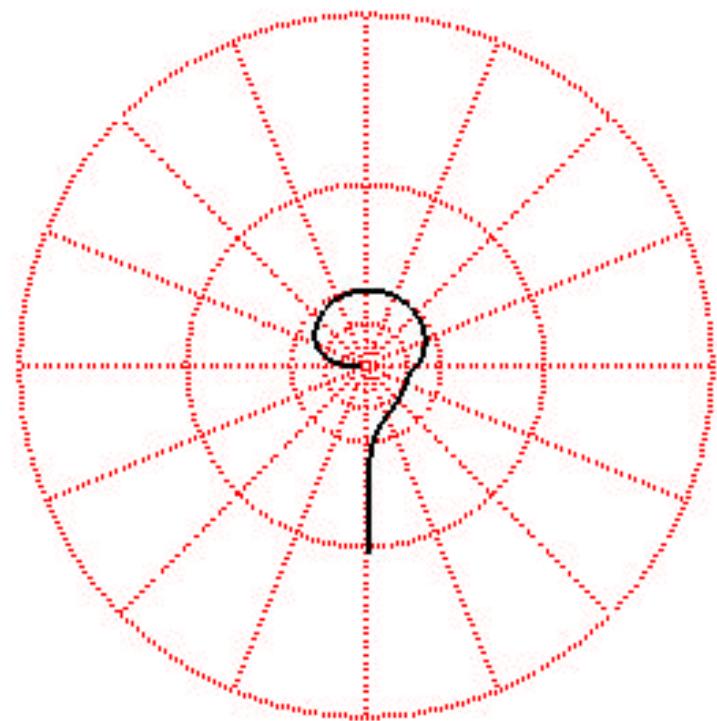
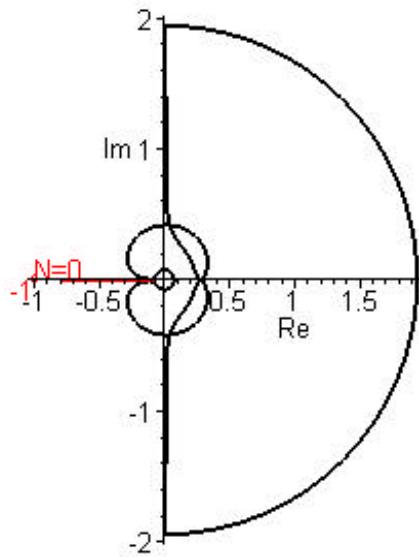


Diagrama Nyquist este formata pe baza diagramei polare pentru $\omega = 0 \dots \infty$ si prin prelungirea ei simetric fata de axa reala pentru $\omega = 0 \dots -\infty$. Inchiderea diagramei se face urmarind conturul Nyquist.

Reactie negativa

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (-1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[-1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**
Diagrama Nyquist

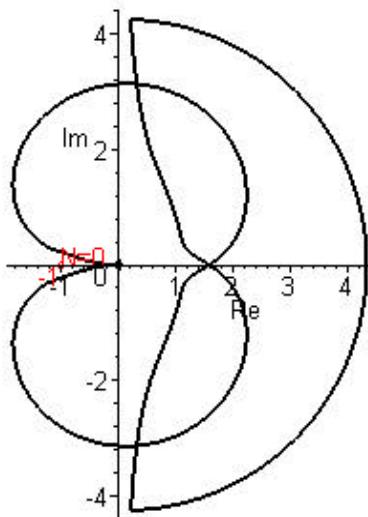


In momentul in care se modifica amplificarea K forma diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Avand in vedere pozitia punctului de referinta (-1,0) in raport cu diagrama deducem ca pentru orice valoare a lui K , N are valoarea 0.

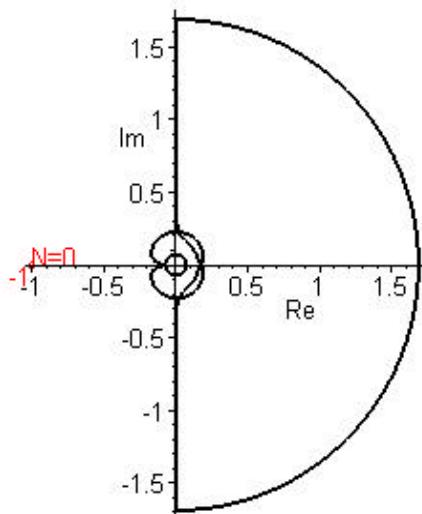
Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = .01$.

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[-1],compresie=[2,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[-1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**
 Diagrama Nyquist

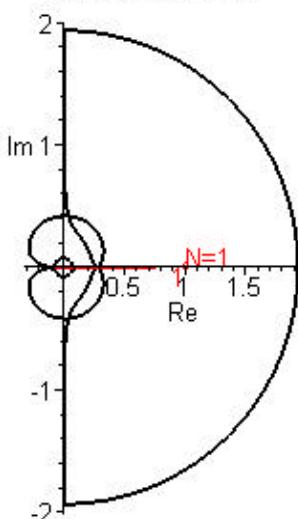


Numarul de inconjururi ale diagramei in jurul punctului de referinta (-1,0) este $N = 0$. Avand in vedere ca functia de transfer in bucla deschisa are $P = 2$ poli in semiplanul drept, deducem ca numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$ este $Z = 2$. ($Z = N + P$). Asadar sistemul cu reactie negativa este instabil avand 2 poli in semiplanul drept, si putem spune ca este **neconditionat instabil**.

Reactie pozitiva

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (1,0).
 > **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[+1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



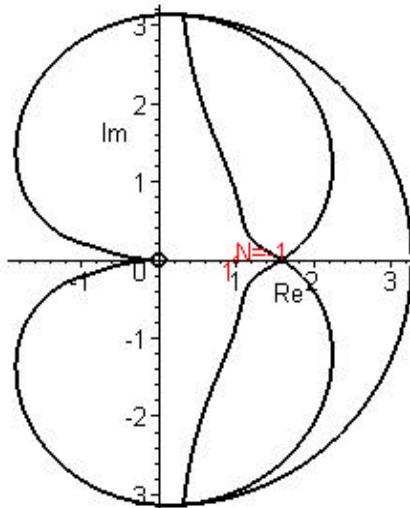
In momentul in care se modifica amplificarea K alura diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Din acest motiv deducem ca exista o valoare K_0 a amplificarii astfel incat:

- pentru orice $K_0 < K$, numarul de inconjuri este $N = -1$
- pentru orice $K < K_0$, numarul de inconjuri este $N = 1$

Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = .01$.

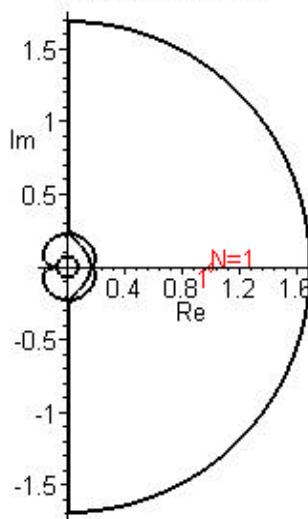
> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[+1],compresie=[2,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=.01),repere=[+1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



In primul grafic, pentru $K_0 < K$, $N = -1$, $Z = 1$ ($Z = N + P$), deci sistemul cu reactie pozitiva este instabil, avand 1 pol in semiplanul drept.

In graficul al doilea, pentru $K_0 < K$, $N = 1$, $Z = 3$ ($Z = N + P$), deci sistemul cu reactie pozitiva este instabil avand 3 poli in semiplanul drept.

Concluzia este ca sistemul cu reactie pozitiva este **conditionat instabil (stabil)**.

Exemplul II

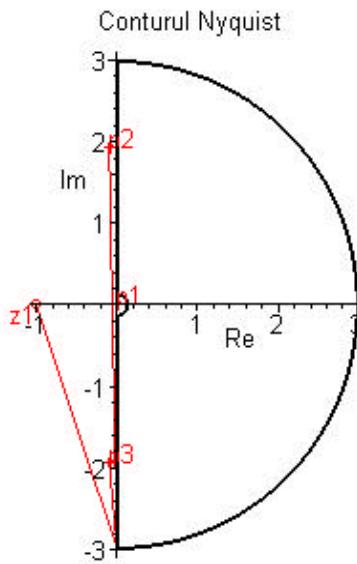
Fie un sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa este:

> **Hd:=K*(s+1)/(s*(s^2+s+100));**

Există un pol în origine care va fi ocolit de către conturul Nyquist și alti doi poli complex conjugati situati în semiplanul stîng, poli care vor fi în exteriorul conturului.

Reprezentarea diagramei poli zerouri a functiei de transfer in bucla deschisa si a conturului Nyquist:

> **Nyquist[contur](eval(Hd,K=1),repere=[-1,1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**



Functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$ nu are poli in semiplanul drept, deci $P = 0$.
Diagrama polară a functiei de transfer $Hd(j\omega)$ ($\omega = 0 \dots \infty$) este reprezentata mai jos:

> **Bode[polar](eval(Hd,K=1),compresie=[4,1]);**

Diagrama polară

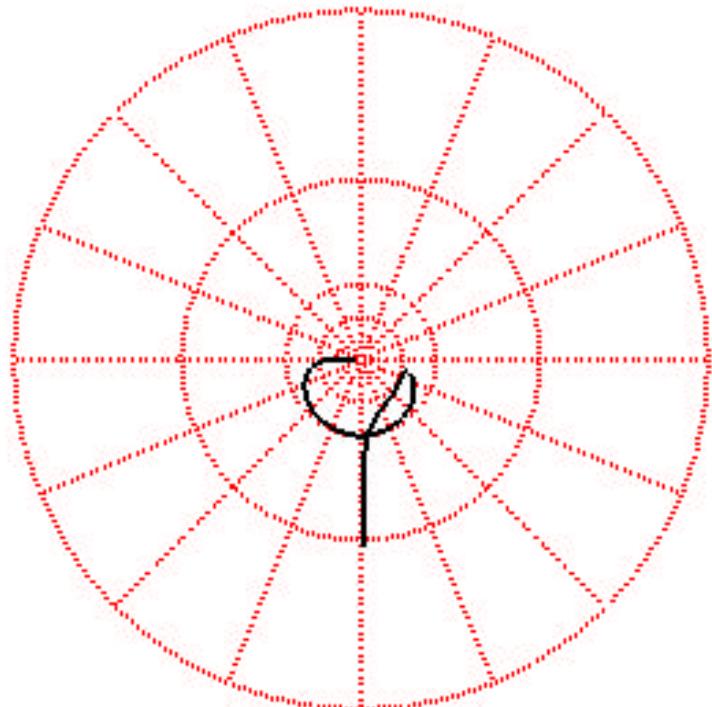
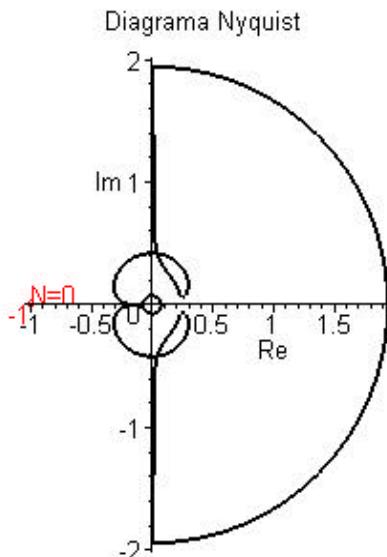


Diagrama Nyquist este formata pe baza diagramei polare pentru $\omega = 0 \dots \infty$ si prin prelungirea ei simetric fata de axa reala pentru $\omega = 0 \dots -\infty$. Inchiderea diagramei se face urmarind conturul Nyquist.

Reactie negativa

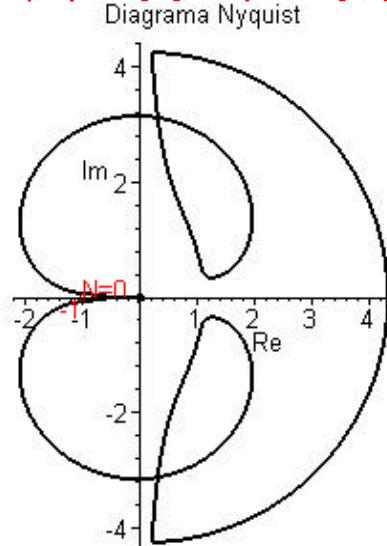
Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (-1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[-1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**

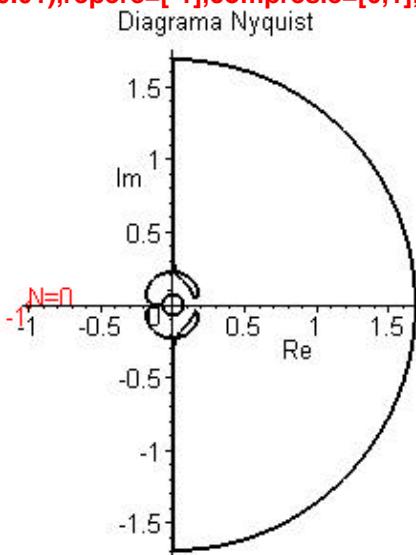


In momentul in care se modifica amplificarea K forma diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Pozitia relativa a punctului de referinta $(-1,0)$ fata de diagrama ramane neschimbata. Deducem ca pentru orice valoare a lui K , N are valoarea 0. Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = .01$.

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[-1],compresie=[2,1],tipgrafic=dinamic);**



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[-1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**



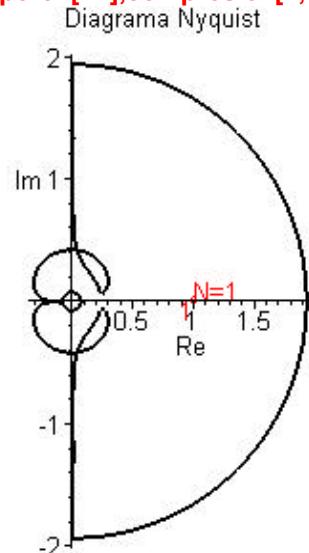
Numarul de inconjururi ale diagramei in jurul punctului de referinta $(-1,0)$ este $N = 0$. Functia de transfer in bucla deschisa are $P = 0$ poli in semiplanul drept, deducem ca numarul de zerouri din semiplanul drept

ale functiei $F(s)$ este $Z=0$. ($Z=N+P$). Sistemul cu reactie negativa este **neconditionat stabil** si nu are poli in semiplanul drept.

Reactie pozitiva

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[+1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**

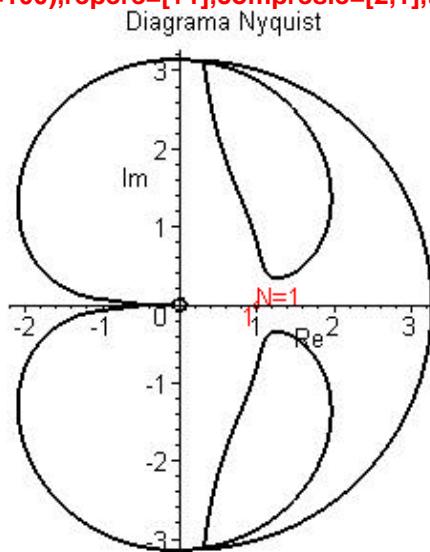


Numarul de inconjuri ale diagramei in jurul punctului de referinta este $N=1$, dupa cum se observa din figura. Avand in vedere ca functia de transfer in bucla deschisa are $P=0$ poli in semiplanul drept, deducem ca numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$ este $Z=1$. ($Z=N+P$). Asadar sistemul cu reactie negativa este instabil avand 1 pol in semiplanul drept.

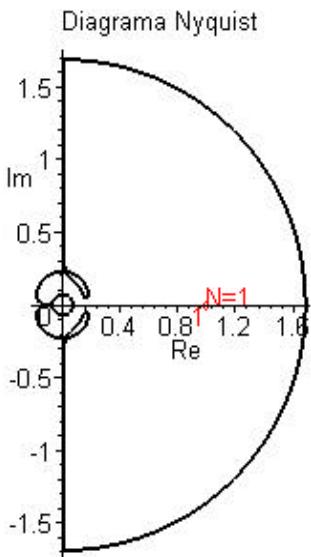
In momentul in care se modifica amplificarea K alura diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Avand in vedere pozitia punctului de referinta in raport cu diagrama deducem ca pentru orice valoare a lui K , N are valoarea 1, deci sistemul cu reactie pozitiva este **neconditionat instabil**.

Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K=100$ si $K=.01$.

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[+1],compresie=[2,1],tipgrafic=dinamic);**



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[+1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**



Probleme. Intrebări

1. Pentru functiile de transfer analizate, se cere:

- sa se traseze diagramele Bode de cistig si faza;
- sa se traseze diagrama polară si sa se gradeze in valori ale lui ω in intervalul $0 \dots \infty$;
- sa se traseze diagrama Nyquist indicind sensul de parcurgere;
- sa se numere inconjuringul punctelor de referinta.

2. Sa se analizeze stabilitatea sistemelor cu reactie pornind de la functia de transfer in bucla deschisa pentru:

$$> Hd:=K*s*(s+10)/((s+1)*(s^2+s+100)*(s+100));$$

$$Hd := \frac{K s (s + 10)}{(s + 1) (s^2 + s + 100) (s + 100)}$$

$$> Hd:=K*(s^2+10*s+10000)/((s+1)*(s^2+s+100));$$

$$Hd := \frac{K (s^2 + 10 s + 10000)}{(s + 1) (s^2 + s + 100)}$$

$$> Hd:=K*(s+10)/(s*(s^2+s+100)*(s+100));$$

$$Hd := \frac{K (s + 10)}{s (s^2 + s + 100) (s + 100)}$$

$$> Hd:=K*(s+100)/((s+1)*(s-10));$$

$$Hd := \frac{K (s + 100)}{(s + 1) (s - 10)}$$

$$> Hd:=K*(s+1)/s;$$

$$Hd := \frac{K (s + 1)}{s}$$

$$> Hd:=K*(s-1)*(s-10)/((s+1)*(s+10));$$

$$Hd := \frac{K (s - 1) (s - 10)}{(s + 1) (s + 10)}$$

$$> Hd:=K*(s+3)*(s+4)/(s*(s+1)*(s+2));$$

$$Hd := \frac{K (s + 3) (s + 4)}{s (s + 1) (s + 2)}$$

$$> Hd:=K/(s*(s+10)*(s^2+s+10000));$$

$$Hd := \frac{K}{s (s + 10) (s^2 + s + 10000)}$$

Studiul stabilitatii circuitelor liniare cu reactie

folosind criteriul Nyquist

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Teorema Cauchy	1
Conturul Nyquist	1
Mod de lucru	3
Exemplul III	3
Reactie negativa	4
Reactie pozitiva	5

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Familiarizarea cu criteriul Nyquist de analiza a stabilitatii sistemelor liniare cu reactie.

Rezumat teoretic:

In esenta, criteriul de analiza a stabilitatii are la baza teorema Cauchy, enuntata mai jos.

Teorema Cauchy

Fie $F : C \rightarrow C$ o fractie rationala cu coeficienti complecsi, si C un contur inchis in planul complex, care nu trece prin nici un pol sau zerou al functiei $F(s)$. Daca conturul C contine in interiorul sau Z zerouri si P poli ai functiei F , atunci cand s se parurge conturul **Cauchy** in sens orar, hodograful functiei $F(s)$ inconjoara originea de $Z - P$ ori in acelasi sens.

Sa consideram acum un sistem cu reactie avand functia de transfer:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - \varepsilon K A(s) B(s)},$$

unde $\varepsilon = 1$ pentru reactie pozitiva si $\varepsilon = -1$ pentru reactie negativa.

Notam cu $H_d(s)$ functia de transfer in bucla deschisa:

$$H_d(s) = K A(s) B(s),$$

putem exprima functia de transfer a sistemului cu reactie sub forma:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - \varepsilon H_d(s)}.$$

Stabilitatea sistemului cu reactie este data de pozitia in planul complex a polilor functiei de transfer $H_r(s)$. Pentru studiul stabilitati sistemului cu reactie la modificarea amplificarii K se urmareste determinarea legaturii dintre numarul de poli din semiplanul drept ale functiei $H_r(s)$ si valoarea lui K , folosind teorema Cauchy.

In acest scop se noteaza cu $F(s)$ numitorul functiei $H_r(s)$:

$$F(s) = 1 - \varepsilon H_d(s).$$

Obs. Avand in vedere legatura dintre $H_r(s)$ si $F(s)$, respectiv legatura dintre $F(s)$ si $H_d(s)$, putem spune ca polii functiei $F(s)$ sunt polii functiei de transfer in bucla deschisa, $H_d(s)$, respectiv zerourile functiei $F(s)$ sunt polii functiei de transfer a sistemului cu reactie, $H_r(s)$.

Se considera un contur inchis in planul complex s care sa contine toti polii si toate zerourile din semiplanul drept ale functiei $F(s)$, dar care sa nu contine polii functiei $F(s)$ situati pe axa imaginara. Un astfel de contur se numeste **conturul Nyquist**.

Conturul Nyquist

Conturul Nyquist este un contur inchis ce inconjoara semiplanul drept al planului complex in sens orar si

este format din:

- axa imaginara pentru $\omega = -\infty \dots \infty$ mai putin in apropierea polilor de pe axa imaginara care sunt ocoliti fiecare cu un semicerc de raza r_0 ($r_0 \rightarrow 0$) cu centru in polul de pe axa imaginara, semicerc situat in semiplanul drept
- conturul se inchide cu un semicerc in semiplanul drept de raza R_0 ($R_0 \rightarrow 0$) centrat in origine.

Practic, alegerea valorilor R_0 si r_0 se face in felul urmator:

- R_0 trebuie sa fie mult mai mare decat modulul tuturor singularitatilor functiei $F(s)$, ($R_0 \rightarrow \infty$).
- r_0 trebuie sa fie mult mai mic decat distanta dintre oricare doua singularitati distincte ale functiei $F(s)$, ($r_0 \rightarrow 0$).

Notam:

- P numarul de poli ai functiei $F(s)$ din semiplanul drept;
- Z numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$.

Se alege un sens de referinta de exemplu sensul orar. Se noteaza cu N numarul de inconjururi pe care le face hodograful functiei $F(s)$ in jurul originii in sensul de referinta fixat, atunci cand s parurge o singura data conturul Nyquist in acelasi sens. Dar numarul de inconjururi pe care le face hodograful lui $F(s)$ in jurul originii este acelasi cu numarul de inconjururi pe care le face hodograful lui $Hd(s)$ in jurul punctului $\frac{1}{\varepsilon}$, adica $-1 + I_0$ (-1,0) pentru reactie negativa sau $1 + I_0$ (1,0) pentru reactie pozitiva.

Hodograful functiei de transfer $Hd(s)$, cand s parurge conturul Nyquist se numeste **diagrama Nyquist**.

Avand in vedere teorema Cauchy, $N = Z - P$, deci $Z = N + P$.

Obs. Avand in vedere legatura dintre $Hr(s)$ si $F(s)$, respectiv legatura dintre $F(s)$ si $Hd(s)$, putem spune ca P reprezinta numarul de poli din semiplanul drept ai functiei de transfer in bucla deschis, $Hd(s)$, iar Z reprezinta numarul de poli din semiplanul drept ai functiei de transfer a sistemului cu reactie, $Hr(s)$.

Criteriul de stabilitate Nyquist

Un sistem cu reactie este stabil daca diagrama Nyquist inconjura punctul de referinta $(-1,0)$ pentru reactie negativa, $(+1,0)$ pentru reactie pozitiva) de P ori in sens antiorar, atunci cand s parurge o singura data in sens orar conturul Nyquist.

Expresia matematica a criteriului de stabilitate Nyquist este $N = -P$ si este echivalenta cu conditia $Z = 0$ (sistemul cu reactie sa nu aiba poli in semiplanul drept, adica sa fie stabil).

Trasarea diagramei Nyquist pleaca in principiu de la diagrama polară a functiei $Hd(I\omega)$, deoarece o parte a conturului Nyquist (cea mai semnificativa) este situata pe axa imaginara. Diagrama Nyquist este simetrica fata de axa reala deoarece conturul Nyquist este simetric fata de axa reala si $Hd(\bar{s}) = (Hd(s))$ pentru orice s complex (pentru sisteme realizabile practic functia $Hd(s)$ are coeficienti reali).

Studiul stabilitatii sistemului cu reactie la variatia amplificarii utilizand criteriul Nyquist.

In principiu se pleaca de la diagrama Nyquist trasata pentru amplificare K unitara. Daca se modifica valoarea amplificarii, modulul functiei $Hd(s)$ se rescaleaza cu valoarea K , dar argumentul ramane neschimbat. Din acest motiv alura diagramei Nyquist ramane neschimbata dar se contracta sau se dilata dupa cum $K < 1$ sau $K > 1$. Acest lucru face posibila deducerea numarului de inconjururi N (in jurul punctului de referinta), la diferite valori ale amplificarii, din pozitia relativa a punctului de referinta in raport cu diagrama Nyquist trasata pentru amplificare unitara.

In functie de caracterul sistemului la variatia amplificarii se poate face urmatoarea clasificare:

- un sistem este **conditionat stabil** sau **conditionat instabil** daca exista doua valori K_1 si K_2 ($0 < K_1$, $0 < K_2$), astfel incat sistemul cu reactie este stabil pentru $K = K_1$ si instabil pentru $K = K_2$.
- un sistem este **neconditionat stabil** daca pentru orice valoare K ($0 < K$) a amplificarii sistemul cu reactie este stabil
- un sistem este **neconditionat instabil** daca pentru orice valoare K ($0 < K$) a amplificarii sistemul cu reactie este instabil.

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru trasarea diagramei polare a functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **Bode[polar]** [help](#)

Pentru reprezentarea conturului si diagramei Nyquist corespunzatoare unui sistem cu reactie:

- functia **Nyquist[contur]** [help](#)
- functia **Nyquist[diagram]** [help](#)

Pe parcursul lucrarii, vom folosi urmatoarele notatii:

- $Hd(s)$ pentru functia de transfer in bucla deschisa a sistemului cu reactie
- K pentru amplificare (intervine in expresia lui $Hd(s)$)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlab",libname;
```

Exemplul III

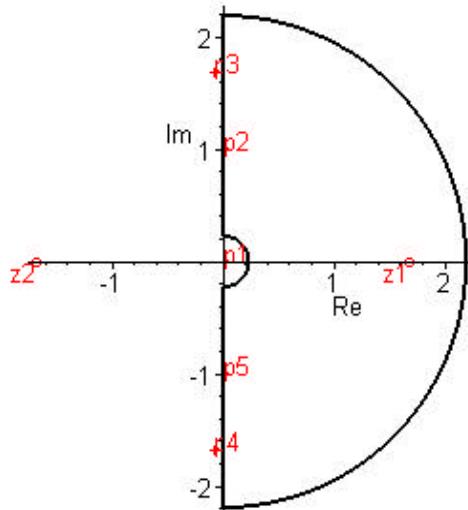
Fie un sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa este:

> **Hd:=K*(s+10)*(s-10)/(s*(s^2+1)*(s^2+s+100)):**

Există un pol in origine care va fi ocolit de catre conturul Nyquist si alte doua perechi de cte doi poli complex conjugati situati in semiplanul sting, poli care vor fi in exteriorul conturului. Reprezentarea diagramei poli zerouri a functiei de transfer in bucla deschisa si a conturului Nyquist:

```
> Nyquist[contur](eval(Hd,K=1),repere=[-1,1],compresie=[6,1],tipgrafic=static);
```

Conturul Nyquist



Functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$ nu are poli in semiplanul drept, deci $P = 0$.
Diagrama polară a functiei de transfer $Hd(j\omega)$ ($\omega = 0 \dots \infty$) este reprezentata mai jos:

```
> Bode[polar](eval(Hd,K=1),compresie=[10,1]);
```

Diagrama polară

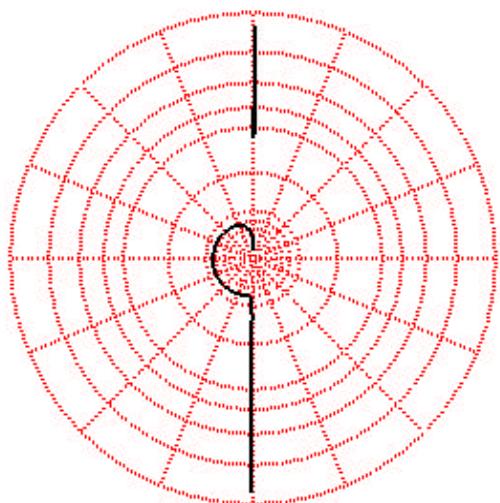


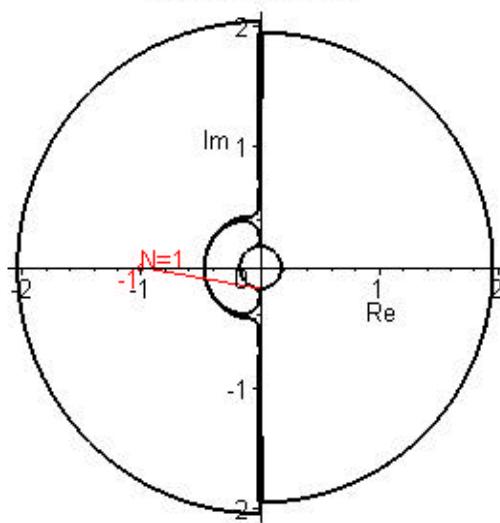
Diagrama Nyquist este formata pe baza diagramei polare pentru $\omega = 0 \dots \infty$ si prin prelungirea ei simetric fata de axa reala pentru $\omega = 0 \dots -\infty$. Inchiderea diagramei se face urmarind conturul Nyquist.

Reactie negativa

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (-1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[-1],compresie=[10,1],tipgrafic=dinamic);**

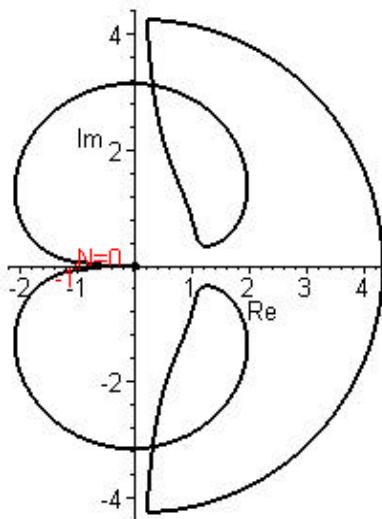
Diagrama Nyquist



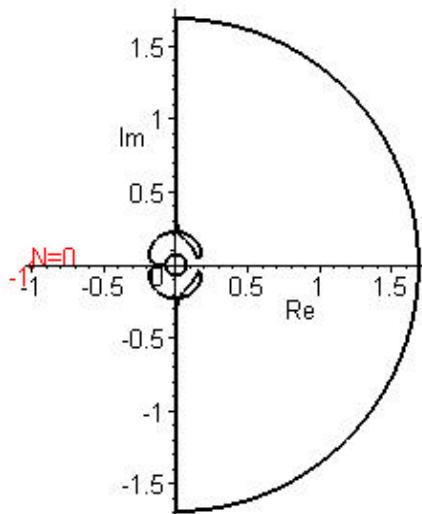
In momentul in care se modifica amplificarea K alura diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Avand in vedere pozitia punctului de referinta in raport cu diagrama deducem ca pentru orice valoare a lui K , N are valoarea 0. Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = .01$.

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[-1],compresie=[2,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[-1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**
 Diagrama Nyquist



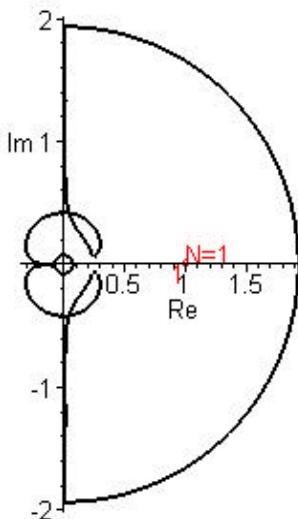
Numarul de inconjururi ale diagramei in jurul punctului de referinta este $N = 0$. Avand in vedere ca functia de transfer in bucla deschisa are $P = 0$ poli in semiplanul drept, deducem ca numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$ este $Z = 0$. ($Z = N + P$). Sistemul cu reactie negativa este *neconditionat stabil* si nu are poli in semiplanul drept.

Reactie pozitiva

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[+1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist

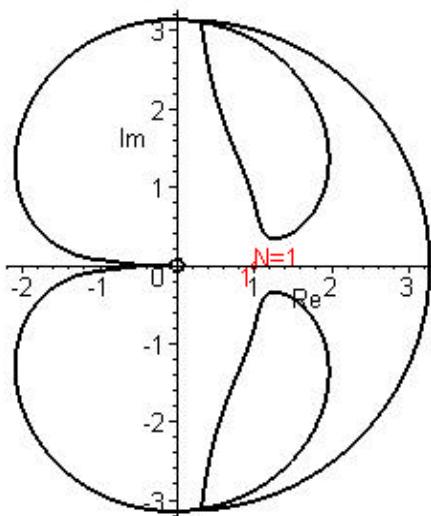


Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind criteriul Nyquist

In momentul in care se modifica amplificarea K ura diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Avand in vedere pozitia punctului de referinta (1,0) in raport cu diagrama deducem ca pentru orice valoare a lui K , N are valoarea 1. Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = .01$.

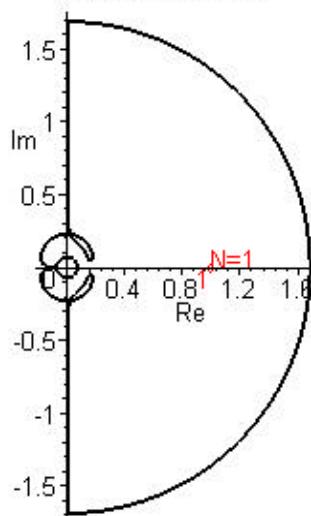
> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[+1],compresie=[2,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[+1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



Numarul de inconjuri ale diagramei in jurul punctului de referinta este $N = 1$. Functia de transfer in bucla deschisa are $P = 0$ poli in semiplanul drept, deducem ca numarul de zerouri din semiplanul drept al functiei $F(s)$ este $Z = 1$. ($Z = N + P$). Sistemul cu reactie pozitiva este **neconditionat instabil** avand 1 pol in semiplanul drept.

Studiul stabilitatii circuitelor liniare cu reactie

folosind criteriul Nyquist

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Teorema Cauchy	1
Conturul Nyquist	1
Mod de lucru	3
Exemplul IV	3
Reactie negativa	4
Reactie pozitiva.....	5

Breviar teoretic

Scopul lucrarii:

Familiarizarea cu criteriul Nyquist de analiza a stabilitatii sistemelor liniare cu reactie.

Rezumat teoretic:

In esenta, criteriul de analiza a stabilitatii are la baza teorema Cauchy, enuntata mai jos.

Teorema Cauchy

Fie $F : C \rightarrow C$ o fractie rationala cu coeficienti complecsi, si C un contur inchis in planul complex, care nu trece prin nici un pol sau zerou al functiei $F(s)$. Daca conturul C contine in interiorul sau Z zerouri si P poli ai functiei F , atunci cand s se parurge conturul **Cauchy** in sens orar, hodograful functiei $F(s)$ inconjoara originea de $Z - P$ ori in acelasi sens.

Sa consideram acum un sistem cu reactie avand functia de transfer:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - \varepsilon K A(s) B(s)},$$

unde $\varepsilon = 1$ pentru reactie pozitiva si $\varepsilon = -1$ pentru reactie negativa.

Notam cu $H_d(s)$ functia de transfer in bucla deschisa:

$$H_d(s) = K A(s) B(s),$$

putem exprima functia de transfer a sistemului cu reactie sub forma:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - \varepsilon H_d(s)}.$$

Stabilitatea sistemului cu reactie este data de pozitia in planul complex a polilor functiei de transfer $H_r(s)$. Pentru studiul stabilitati sistemului cu reactie la modificarea amplificarii K se urmareste determinarea legaturii dintre numarul de poli din semiplanul drept ale functiei $H_r(s)$ si valoarea lui K , folosind teorema Cauchy.

In acest scop se noteaza cu $F(s)$ numitorul functiei $H_r(s)$:

$$F(s) = 1 - \varepsilon H_d(s).$$

Obs. Avand in vedere legatura dintre $H_r(s)$ si $F(s)$, respectiv legatura dintre $F(s)$ si $H_d(s)$, putem spune ca polii functiei $F(s)$ sunt polii functiei de transfer in bucla deschisa, $H_d(s)$, respectiv zerourile functiei $F(s)$ sunt polii functiei de transfer a sistemului cu reactie, $H_r(s)$.

Se considera un contur inchis in planul complex s care sa contine toti polii si toate zerourile din semiplanul drept ale functiei $F(s)$, dar care sa nu contine polii functiei $F(s)$ situati pe axa imaginara. Un astfel de contur se numeste **conturul Nyquist**.

Conturul Nyquist

Conturul Nyquist este un contur inchis ce inconjoara semiplanul drept al planului complex in sens orar si

este format din:

- axa imaginara pentru $\omega = -\infty \dots \infty$ mai putin in apropierea polilor de pe axa imaginara care sunt ocoliti fiecare cu un semicerc de raza r_0 ($r_0 \rightarrow 0$) cu centru in polul de pe axa imaginara, semicerc situat in semiplanul drept
- conturul se inchide cu un semicerc in semiplanul drept de raza R_0 ($R_0 \rightarrow 0$) centrat in origine.

Practic, alegerea valorilor R_0 si r_0 se face in felul urmator:

- R_0 trebuie sa fie mult mai mare decat modulul tuturor singularitatilor functiei $F(s)$, ($R_0 \rightarrow \infty$).
- r_0 trebuie sa fie mult mai mic decat distanta dintre oricare doua singularitati distincte ale functiei $F(s)$, ($r_0 \rightarrow 0$).

Notam:

- P numarul de poli ai functiei $F(s)$ din semiplanul drept;
- Z numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$.

Se alege un sens de referinta de exemplu sensul orar. Se noteaza cu N numarul de inconjururi pe care le face hodograful functiei $F(s)$ in jurul originii in sensul de referinta fixat, atunci cand s parurge o singura data conturul Nyquist in acelasi sens. Dar numarul de inconjururi pe care le face hodograful lui $F(s)$ in jurul originii este acelasi cu numarul de inconjururi pe care le face hodograful lui $Hd(s)$ in jurul punctului $\frac{1}{\varepsilon}$, adica $-1 + I_0$ (-1,0) pentru reactie negativa sau $1 + I_0$ (1,0) pentru reactie pozitiva.

Hodograful functiei de transfer $Hd(s)$, cand s parurge conturul Nyquist se numeste **diagrama Nyquist**.

Avand in vedere teorema Cauchy, $N = Z - P$, deci $Z = N + P$.

Obs. Avand in vedere legatura dintre $Hr(s)$ si $F(s)$, respectiv legatura dintre $F(s)$ si $Hd(s)$, putem spune ca P reprezinta numarul de poli din semiplanul drept ai functiei de transfer in bucla deschis, $Hd(s)$, iar Z reprezinta numarul de poli din semiplanul drept ai functiei de transfer a sistemului cu reactie, $Hr(s)$.

Criteriul de stabilitate Nyquist

Un sistem cu reactie este stabil daca diagrama Nyquist inconjura punctul de referinta $(-1,0)$ pentru reactie negativa, $(+1,0)$ pentru reactie pozitiva) de P ori in sens antiorar, atunci cand s parurge o singura data in sens orar conturul Nyquist.

Expresia matematica a criteriului de stabilitate Nyquist este $N = -P$ si este echivalenta cu conditia $Z = 0$ (sistemul cu reactie sa nu aiba poli in semiplanul drept, adica sa fie stabil).

Trasarea diagramei Nyquist pleaca in principiu de la diagrama polară a functiei $Hd(I\omega)$, deoarece o parte a conturului Nyquist (cea mai semnificativa) este situata pe axa imaginara. Diagrama Nyquist este simetrica fata de axa reala deoarece conturul Nyquist este simetric fata de axa reala si $Hd(\bar{s}) = (Hd(s))$ pentru orice s complex (pentru sisteme realizabile practic functia $Hd(s)$ are coeficienti reali).

Studiul stabilitatii sistemului cu reactie la variatia amplificarii utilizand criteriul Nyquist.

In principiu se pleaca de la diagrama Nyquist trasata pentru amplificare K unitara. Daca se modifica valoarea amplificarii, modulul functiei $Hd(s)$ se rescaleaza cu valoarea K , dar argumentul ramane neschimbat. Din acest motiv alura diagramei Nyquist ramane neschimbata dar se contracta sau se dilata dupa cum $K < 1$ sau $K > 1$. Acest lucru face posibila deducerea numarului de inconjururi N (in jurul punctului de referinta), la diferite valori ale amplificarii, din pozitia relativa a punctului de referinta in raport cu diagrama Nyquist trasata pentru amplificare unitara.

In functie de caracterul sistemului la variatia amplificarii se poate face urmatoarea clasificare:

- un sistem este **conditionat stabil** sau **conditionat instabil** daca exista doua valori K_1 si K_2 ($0 < K_1$, $0 < K_2$), astfel incat sistemul cu reactie este stabil pentru $K = K_1$ si instabil pentru $K = K_2$.
- un sistem este **neconditionat stabil** daca pentru orice valoare K ($0 < K$) a amplificarii sistemul cu reactie este stabil
- un sistem este **neconditionat instabil** daca pentru orice valoare K ($0 < K$) a amplificarii sistemul cu reactie este instabil.

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlib**.

Pentru trasarea diagramei polare a functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **Bode[polara]** [help](#)

Pentru reprezentarea conturului si diagramei Nyquist corespunzatoare unui sistem cu reactie:

- functia **Nyquist[contur]** [help](#)
- functia **Nyquist[diagram]** [help](#)

Pe parcursul lucrarii, vom folosi urmatoarele notatii:

- $Hd(s)$ pentru functia de transfer in bucla deschisa a sistemului cu reactie
- K pentru amplificare (intervine in expresia lui $Hd(s)$)

> **restart;**
libname:="..../SCSlib",libname:

Exemplul IV

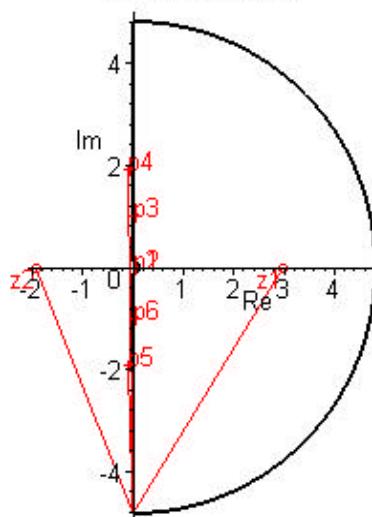
Fie un sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa este:

> **Hd:=K*((s+10)*(s-100))/(s^2*(s^2+1)*(s^2+s+100));**

Exista un pol dublu in origine si doi poli complex conjugati pur imaginari care va fi ocolit de catre conturul Nyquist. Mai exista si alti doi poli complex conjugati situati in semiplanul sting, poli care vor fi in exteriorul conturului. Reprezentarea diagramei poli zerouri a functiei de transfer in bucla deschisa si a conturului Nyquist:

> **Nyquist[contur](eval(Hd,K=1),repere=[-1,1],compresie=[4,1],tipgrafic=dinamic);**

Conturul Nyquist



Functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$ nu are poli in semiplanul drept, deci $P = 0$.
 Diagrama polară a functiei de transfer $Hd(I\omega)$ ($\omega = 0 \dots \infty$) este reprezentata mai jos:

> **Bode[polara](eval(Hd,K=1),compresie=[14,1]);**

Diagrama polară

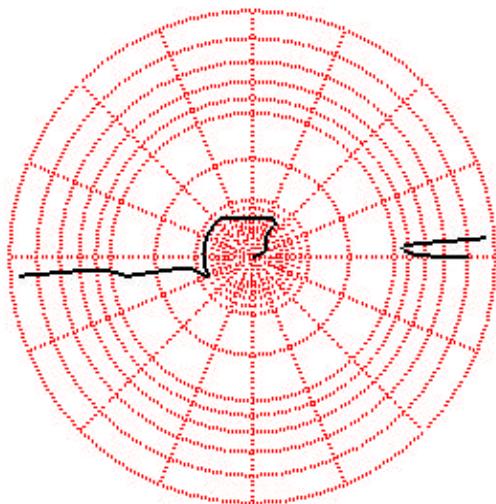


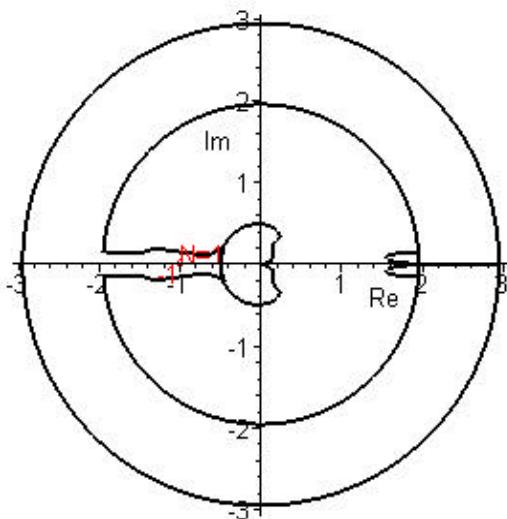
Diagrama Nyquist este formata pe baza diagramei polare pentru $\omega = 0 \dots \infty$ si prin prelungirea ei simetric fata de axa reala pentru $\omega = 0 \dots -\infty$. Inchiderea diagramei se face urmarind conturul Nyquist.

Reactie negativa

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (-1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[-1],compresie=[14,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



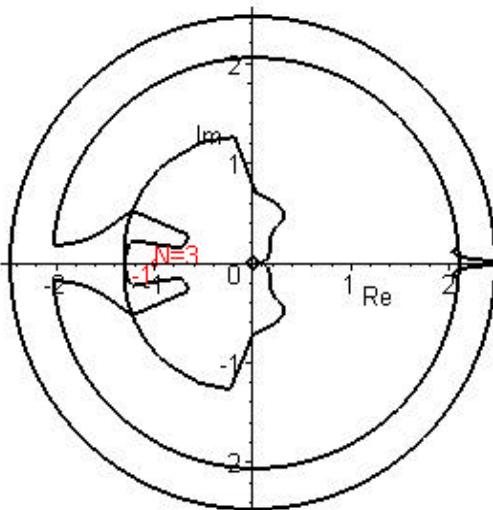
In momentul in care se modifica amplificarea K forma diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Avand in vedere pozitia punctului de referinta (-1,0) in raport cu diagrama deducem ca exista o valoare K_0 a amplificarii astfel incat:

- pentru orice $K_0 < K$, numarul de inconjuri este $N = 3$
- pentru orice $K < K_0$, numarul de inconjuri este $N = 1$

Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = .01$.

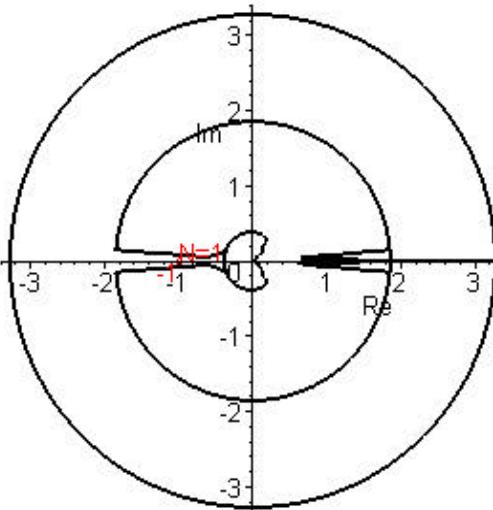
> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[-1],compresie=[12,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[-1],compresie=[16,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



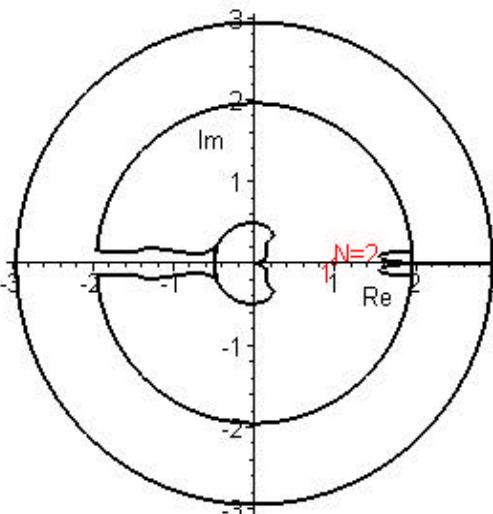
Pentru orice $K_0 < K$, numarul de inconjuri este $N = 3$ deci $Z = 3$. Pentru orice $K < K_0$, numarul de inconjuri este $N = 1$ deci $Z = 1$. Pentru toate situatiile sistemul cu reactie negativa este **neconditionat instabil** avand poli in semiplanul drept.

Reactie pozitiva

Diagrama Nyquist la amplificare unitara este reprezentata mai jos, impreuna cu punctul de referinta (1,0).

> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=1),repere=[+1],compresie=[14,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist

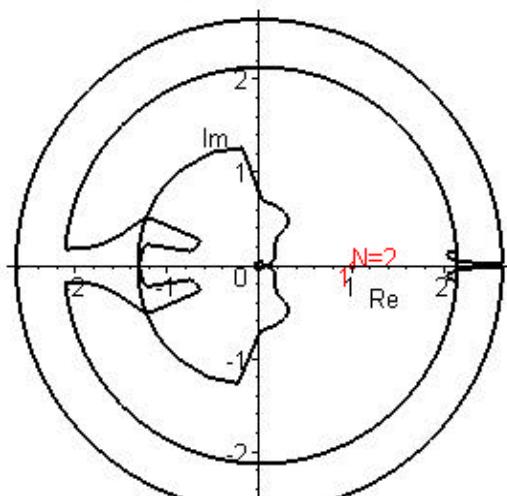


Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind criteriul Nyquist

In momentul in care se modifica amplificarea K ura diagramei Nyquist ramane aceeasi, dar se "dilata" sau se "contracta", dupa cum $1 < K$ sau $K < 1$. Avand in vedere pozitia punctului de referinta (1,0) in raport cu diagrama deducem ca pentru orice valoare a lui K , $N=1$. Acest lucru este confirmat de cele doua diagrame de mai jos, reprezentate pentru $K = 100$ si $K = 0.01$.

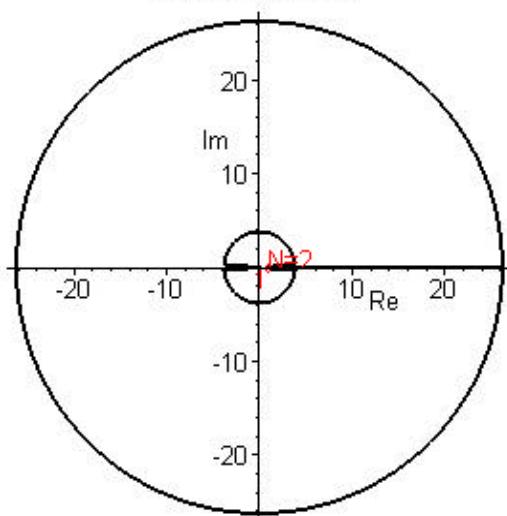
> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=100),repere=[+1],compresie=[12,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



> **Nyquist[diagrama](eval(Hd,K=0.01),repere=[+1],compresie=[6,1],tipgrafic=dinamic);**

Diagrama Nyquist



Numarul de inconjuri ale diagramei in jurul punctului de referinta este $N = 1$. Functia de transfer in bucla deschisa are $P = 0$ poli in semiplanul drept, deducem ca numarul de zerouri din semiplanul drept ale functiei $F(s)$ este $Z = 1$. ($Z = N + P$). Sistemul cu reactie pozitiva avand 1 pol in semiplanul drept este **neconditionat instabil**.

Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind metoda locului radacinilor

Partea I: Reguli de trasare rapida & Exemplul I

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Reguli de trasare rapida a locului radacinilor	2
Reactie negativa ($\epsilon = -1$)	2
Reactie pozitiva ($\epsilon = 1$)	2
Reprezentare spatiala a locului radacinilor	3
Mod de lucru	3
Exemple	3
Exemplul I	3
Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$	3
Reactie negativa	3
Trasarea rapida a L.R.	3
Animatie	4
Reactie pozitiva.....	5
Trasarea rapida a L.R.	5
Animatie	5

Breviar teoretic

Schema bloc generala a unui sistem cu reactie este cea din figura de mai jos.

Functia de transfer a sistemului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{K A(s)}{1 - \epsilon K A(s) B(s)},$$

unde $\epsilon = 1$ pentru reactie pozitiva si $\epsilon = -1$ pentru reactie negativa.

Avand in vedere ca functia de transfer in bucla deschisa este:

$$Hd(s) = K A(s) B(s),$$

putem exprima functia de transfer a sistemului cu reactie sub forma:

$$Hr(s) = \frac{K A(s)}{1 - \epsilon Hd(s)}.$$

Stabilitatea sistemului cu reactie este data asadar de pozitia in planul complex a polilor functiei de transfer $Hr(s)$, care reprezinta zerourile functiei $F(s) = 1 - \epsilon Hd(s)$. Pentru studiul stabilitatii sistemului cu reactie la variatia amplificarii este suficient asadar studiul pozitiei in planul complex a radacinilor ecuatiei $1 - \epsilon Hd(s) = 0$, la variatia amplificarii.

Locul Radacinilor (L.R.) reprezinta locul geometric al radacinilor ecuatiei $1 - K A(s) B(s) = 0$, la variatia amplificarii pentru $K = 0 \dots \infty$. Radacinile ecuatiei $1 - K A(s) B(s) = 0$ ($1 - \epsilon Hd(s) = 0$) sunt tocmai polilor functiei de transfer $Hr(s)$ a sistemului cu reactie.

Observatii:

1. **L.R.** se traseaza in planul complex s si se gradeaza in valori ale lui K. **L.R.** poate fi format din mai multe ramuri, aceeasi valoare a lui K va fi scrisa in cte un punct de pe fiecare ramura.
2. Analiza de stabilitate se determina prin simpla inspectie a **L.R.**. Sistemul cu reactie va fi stabil pentru acele valori ale lui K pentru care toate ramurile se afla in semiplanul sting si instabil pentru toate valorile lui K pentru care macar una din ramuri este in semiplanul drept.

- 3.** Discutia de stabilitate pentru situatia limita cu poli ai functiei de transfer in bucla inchisa pe axa imaginara duce la concluzia ca circuitul este stabil daca polii sunt simpli.

Reguli de trasare rapida a locului radacinilor

Vom presupune in cele ce urmeaza ca functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$ are P poli, notati $p_k, k=1..P$ si Z zerouri, notate $z_l, l=1..Z$. Proprietatile matematice ale locului radacinilor sunt concretizate in regulile de trasare rapida atit pentru reactie pozitiva cit si pentru reactie negativa.

Reactie negativa ($\epsilon = -1$)

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{KA(s)}{1 + KA(s)B(s)}.$$

- 1. L.R.** are P ramuri care pleaca din polii p_k ai functiei de transfer $Hd(s)$ pentru $K=0$.
- 2.** Z ramuri ale **L.R.** ajung in zerourile z_l ale functiei de transfer $Hd(s)$ iar $P-Z$ ramuri tind asimptotic spre infinit pentru $K \rightarrow \infty$.
- 3.** Ramurile **L.R.** sunt simetrice fata de axa reala.
- 4.** Cele $P-Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele:

$$xCg = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \text{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \text{Real}(z_l) \right)}{P-Z}, \quad yCg = 0.$$

- 5.** Cele $P-Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{P-Z}, \quad i = 1..P-Z$$

- 6.** Ramurile de pe axa reala ale **L.R.** sunt situate la stanga unui numar impar de singularitati (poli si zerouri).

- 7.** Ramurile care parasesc axa reala o fac perpendicular pe axa.

Reactie pozitiva ($\epsilon = 1$)

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{KA(s)}{1 - KA(s)B(s)}.$$

- 1. L.R.** are P ramuri care pleaca din polii functiei de transfer $Hd(s)$ pentru $K=0$.
- 2.** Z ramuri ale **L.R.** ajung in cele Z zerouri si $P-Z$ ramuri tind asimptotic spre infinit pentru $K \rightarrow \infty$.
- 3.** Ramurile **L.R.** sunt simetrice fata de axa reala.
- 4.** Cele $P-Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele

$$xCg = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \text{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \text{Real}(z_l) \right)}{P-Z}, \quad yCg = 0$$

in planul complex.

- 5.** Cele $P-Z$ asimptote ale ramurilor care tind la infinit formeaza cu axa reala unghiurile

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{P-Z}, \quad i = 1..P-Z$$

- 6.** Ramurile de pe axa reala ale **L.R.** sunt situate la stanga unui numar par de singularitati.(poli si zerouri).

- 7.** Ramurile care parasesc/vin pe axa reala o fac perpendicular pe axa.

Obs: Diferit fata de reactie pozitiva sunt numai regulile **5** (formula) si **6**.

Observatii.

- In cazul in care $Z = P$, toate ramurile **L.R.** pleaca din poli pentru $K = 0$ si ajung in zerouri pentru $K \rightarrow \infty$. In acest caz nu exista ramuri divergente la infinit si nu se calculeaza asimtote.
- Atit pentru reactie negativa cit si pentru reactie pozitiva asimptotele se intersecteaza in acelasi centru de greutate C_g .

Reprezentare spatiala a locului radacinilor

L.R. se poate reprezenta si spatial in coordonate $\{K, \operatorname{Re}(p), \operatorname{Im}(p)\}$ la variatia amplificarii pentru $K = 0 \dots \infty$. **L.R.** are P ramuri spatiale care pleaca din polii functiei de transfer $Hd(s)$ pentru $K = 0$. Z ramuri ale **L.R.** 'ajung asimptotic' in zerourile z_i ale functiei de transfer $Hd(s)$ iar $P - Z$ ramuri tind asimptotic spre infinit pentru $K \rightarrow \infty$. Centrul de greutate este de coordonate $\{0, x_{Cg}, y_{Cg}\}$ iar asimptotele sunt curbe spatiale care se intersecteaza in centrul de greutate si au coordonate:

$$\{ K, K^{\left(\frac{1}{P-Z}\right)} \cos(\theta_j), K^{\left(\frac{1}{P-Z}\right)} \sin(\theta_j) \}, i = 1 \dots P - Z, K = 0 \dots \infty$$

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlab**.

Pentru calcularea functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)

Pentru reprezentarea locului radacinilor, in plan si in spatiu, corespunzator sistemului cu reactie:

- functia **LocRad[plan]** [help](#)
- functia **LocRad[spatiu]** [help](#)

```
> restart;
> libname:="..../SCSlab",libname;
> with(LinearAlgebra):
> rp := 'reactie = pozitiva':rn := 'reactie = negativa':
```

Exemple

Exemplul I

Ne propunem sa studiem stabilitatea unui sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara este:

```
> Hd:=(s^2+0.1*s+4)/(s*(s^2+s+1));
Hd := 
$$\frac{s^2 + .1 s + 4}{s (s^2 + s + 1)}$$

```

Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$

```
> p:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=poli):P:= RowDimension(p);
P := 3
```

```
> z:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=zerouri):Z:= RowDimension(z);
Z := 2
```

```
> PZ[numeric](Hd,s);
```

$$\begin{bmatrix} z_1 & -.05000 + 1.999I \\ z_2 & -.05000 - 1.999I \\ p_1 & 0. \\ p_2 & -.5000 + .8660I \\ p_3 & -.5000 - .8660I \end{bmatrix}$$

Reactie negativa

Trasarea rapida a L.R.

Pentru reactie negativa, proprietatile **L.R.** sunt urmatoarele:

1. **L.R.** are P ramuri care pleaca din cei P poli ai functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$.
2. Din cele P ramuri ale **L.R.**, Z ramuri tind spre cele Z zerouri ale functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s)$, iar P-Z ramuri tind asimptotic spre infinit.
3. Ramurile **L.R.** sunt simtrice fata de axa reala.

4. Asimptota ramurii care tind spre infinit se intersecteaza in centrul de greutate de coordonate:

> **xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;**

$$xCg := -0.90000$$

$$yCg := 0$$

5. Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

> **theta:=[seq((2*i+1)*Pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];**

$$\theta := [\pi]$$

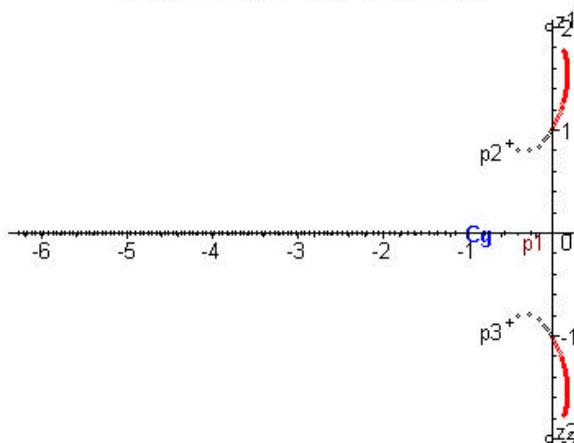
6. Ramurile **L.R.** situate pe axa reala sunt la stanga unui numar impar de singularitati

7. Nu este cazul unor ramuri care sa paraseasca/vina pe axa reala.

Locul radacinilor pentru *reactie negativa* este:

> **LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..5);**

Locul radacinilor pentru reactie negativa

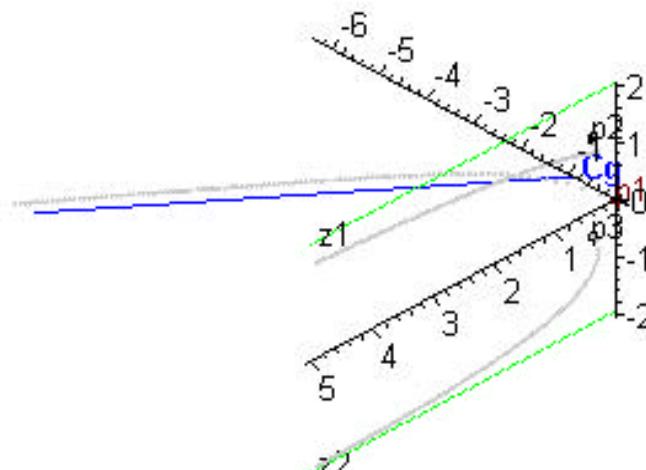


Animatie

> **LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..5,tipgrafic=dinamic);**

> **LocRad[spatiu](Hd,rn,interval=0..5,tipgrafic=dinamic);**

Locul radacinilor pentru reactie negativa



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterioare, observam ca exista doua ramuri ale **L.R.**, care intersecteaza semiplanul complex drept, dar nu sunt situate in totalitate in acest semiplan. Pentru K mic ($K < K_1$) sau K foarte mare ($K > K_2$) toate ramurile sunt in semiplanul stang. Pentru $K = (K_1, K_2)$ doua ramuri sunt in semiplanul drept. Putem spune asadar ca sistemul cu *reactie negativa* este *conditionat stabil (instabil)*.

Reactie pozitiva

Trasarea rapida a L.R.

Pentru *reactie pozitiva*, proprietatile **L.R.** sunt urmatoarele:

1. **L.R.** are P ramuri care pleaca din cei P poli ai functiei de transfer in bucla deschisa $H_d(s)$.
2. Din cele P ramuri ale **L.R.**, Z ramuri tind spre cele Z zerouri ale functiei de transfer in bucla deschisa $H_d(s)$, iar P-Z ramura tinde asimptotic spre infinit.
3. Ramurile **L.R.** sunt simtrice fata de axa reala.
4. Asimptota ramurii care tinde spre infinit, are originea in centrul de greutate de coordonate:

> **xCg:=**(sum('Re(p[k,2])', 'k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])', 'l'=1..Z))/(P-Z);**yCg:=**0;

$$xCg := -0.90000$$

$$yCg := 0$$

5. Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

> **theta:=[seq(2*i*pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];**

$$\theta := [0]$$

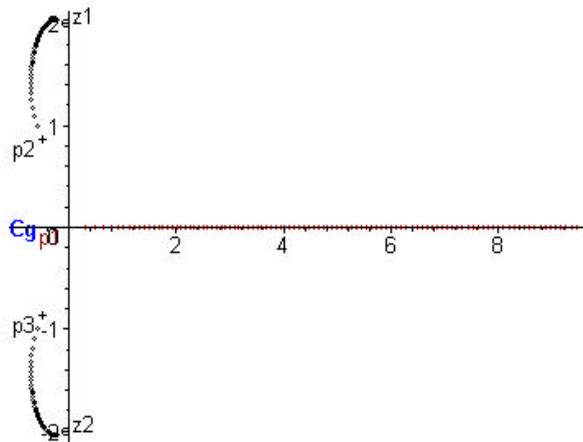
6. Ramurile **L.R.** situate pe axa reala sunt la stanga unui numar par de singularitati.

7. Nu sunt ramuri care sa paraseasca axa reala.

Locul radacinilor pentru *reactiei pozitiva* este:

> **LocRad[plan](Hd,rp,interval=0..10);**

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva

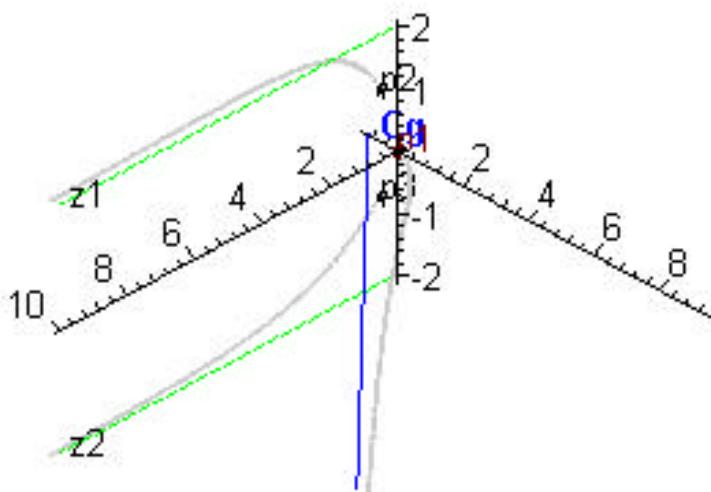


Animatie

> **LocRad[plan](Hd,rp,interval=0..10,tipgrafic=dinamic);**

> **LocRad[spatiu](Hd,rp,interval=0..10,tipgrafic=dinamic);**

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterior, observam ca exista o ramura a **L.R.**, situata in totalitate in semiplanul complex drept. Putem spune asadar ca sistemul este *neconditionat instabil*.

Specificul exemplului este in perechea de poli complex conjugati si perechea de zerouri complex conjugate. L.R. Pleaca din poli si ajunge in zerouri in mod diferit pentru reactie pozitiva si pentru reactie negativa. Polul simplu din origine diverge la infinit pe axa reala, pentru reactie negativa prin semiplanul sting, pentru reactie pozitiva prin semiplanul drept.

Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind metoda locului radacinilor

Partea II: Exemple (continuare)

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Reguli de trasare rapida a locului radacinilor	1
Reactie negativa	1
Reactie pozitiva.....	2
Mod de lucru	2
Exemple	2
Exemplul II	2
Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$	2
Reactie negativa	3
Trasarea rapida a L.R.	3
Animatie	3
Reactie pozitiva.....	3
Trasarea rapida a L.R.	3
Animatie	4

Breviar teoretic

Chestiuni teoretice sunt descrise in Partea I a laboratorului.

Reguli de trasare rapida a locului radacinilor

Consideram functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$ cu P poli, notati $p_k, k=1..P$ si Z zerouri, noteate $z_l, l=1..Z$.

Sunt reamintite pe scurt formulele importante de calcul.

Reactie negativa

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{K A(s)}{1 + K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote are ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele:

$$xCg = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad yCg = 0.$$

Cele $P - Z$ asymptote are ramurilor care tind spre infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{P-Z}, \quad i = 1..P-Z$$

Ramurile de pe axa reala ale **L.R.** sunt situate la stanga unui numar impar de singularitati (poli si zerouri).

Reactie pozitiva

Funcția de transfer a circuitului cu reactie este:

$$H_r(s) = \frac{KA(s)}{1 - KA(s)B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit se întâlnesc într-un punct numit *centru de greutate*, (C_g), care are coordonatele

$$xC_g = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \text{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \text{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad yC_g = 0$$

în planul complex.

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind la infinit formează cu axa reală unghiurile

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{P - Z}, \quad i = 1 \dots P - Z$$

Ramurile de pe axa reală ale **L.R.** sunt situate la stanga unui număr par de singularități.(poli și zerouri).

Mod de lucru

În afara de funcțiile incluse în libraria standard Maple, în această lucrare vor fi utilizate câteva funcții din libraria aditională **SCSlib**.

Pentru calcularea funcției de transfer în buclă deschisă:

- funcția **PZ[numeric]** [help](#)

Pentru reprezentarea locului radacinilor, în plan și în spațiu, corespunzător sistemului cu reactie:

- funcția **LocRad[plan]** [help](#)
- funcția **LocRad[spatiu]** [help](#)

```
> restart;
> libname:=".SCSlib",libname;
> with(LinearAlgebra);
> rp := 'reactie = pozitiva':rn := 'reactie = negativa':
```

Exemple

Exemplul II

Ne propunem să studiem stabilitatea unui sistem cu reactie pentru care funcția de transfer în buclă deschisă la amplificare unitară este:

```
> Hd:=(s+10)*(s+100)/s/(s+1)/(s+5);
```

$$Hd := \frac{(s + 10)(s + 100)}{s(s + 1)(s + 5)}$$

Poli și zerourile funcției de transfer în buclă deschisă $Hd(s)$

```
> p:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=poli):P:= RowDimension(p);
P := 3
```

```
> z:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=zerouri):Z:= RowDimension(z);
Z := 2
```

```
> PZ[numeric](Hd,s);
```

$$\begin{bmatrix} z1 & -10.00 \\ z2 & -100.0 \\ p1 & 0. \\ p2 & -1.000 \\ p3 & -5.000 \end{bmatrix}$$

Reactie negativa

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tind spre infinit se intersecteaza in centrul de greutate de coordonate:

> $x_{Cg} := (\text{sum}'(\text{Re}(p[k,2]), 'k'=1..P) - \text{sum}'(\text{Re}(z[l,2]), 'l'=1..Z)) / (P-Z); y_{Cg} := 0;$

$$x_{Cg} := 104.000$$

$$y_{Cg} := 0$$

Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

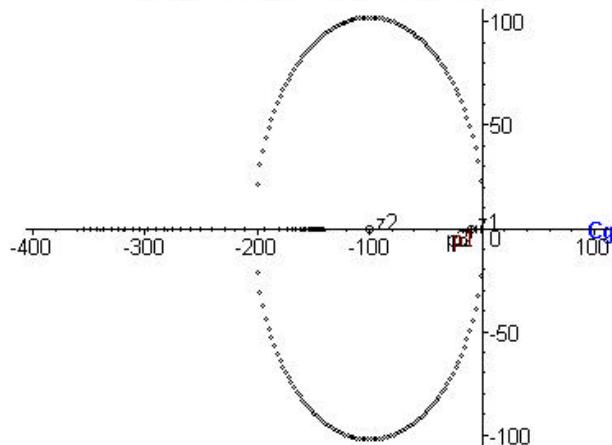
> $\theta := [\text{seq}((2*i+1)*\pi/(P-Z), i=0..P-Z-1)];$

$$\theta := [\pi]$$

Locul radacinilor pentru *reactie negativa* este:

> $\text{LocRad}[\text{plan}](Hd, rn, \text{interval}=0..500);$

Locul radacinilor pentru reactie negativa

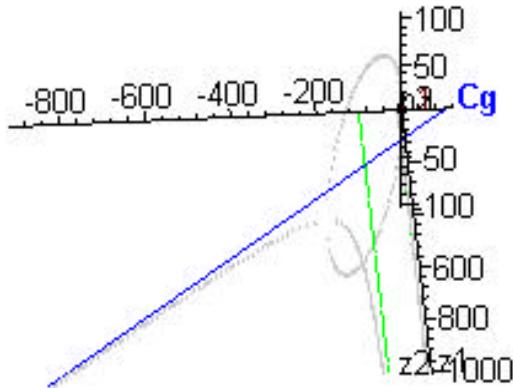


Animatie

> $\text{LocRad}[\text{plan}](Hd, rn, \text{interval}=0..500, \text{tipgrafic}=\text{dinamic});$

> $\text{LocRad}[\text{spatiu}](Hd, rn, \text{interval}=0..1000, \text{tipgrafic}=\text{dinamic});$

Locul radacinilor pentru reactie negativa



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterioare, observam ca toate ramurile **L.R.** sunt situate in totalitate in semiplanul complex stang. Putem spune asadar ca sistemul cu *reactie negativa* este *neconditonal stabil*.

Reactie pozitiva

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tind spre infinit, are originea in centrul de greutate de coordonate:

> $x_{Cg} := (\text{sum}('Re(p[k,2])', 'k'=1..P) - \text{sum}('Re(z[l,2])', 'l'=1..Z)) / (P-Z);$

$$x_{Cg} := 104.000$$

$$y_{Cg} := 0$$

Aсимптота рамури, care тинде la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

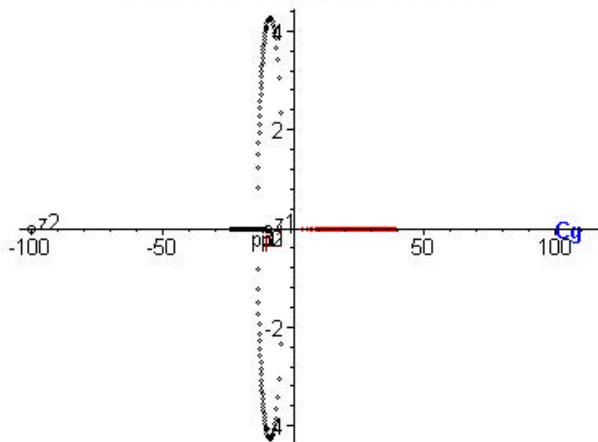
> $\theta := [\text{seq}(2*i*\pi/(P-Z), i=0..P-Z-1)];$

$$\theta := [0]$$

Locul radacinilor pentru *reactiei pozitiva* este:

> $\text{LocRad}[\text{plan}](Hd, rp, \text{interval}=0..10);$

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva

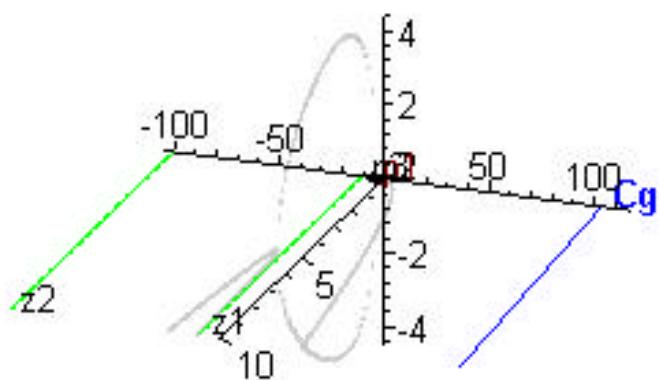


Animatie

> $\text{LocRad}[\text{plan}](Hd, rp, \text{interval}=0..10, \text{tipgrafic}=\text{dinamic});$

> $\text{LocRad}[\text{spatiu}](Hd, rp, \text{interval}=0..10, \text{tipgrafic}=\text{dinamic});$

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterior, observam ca exista o ramura a **L.R.**, situata in totalitate in semiplanul complex drept. Putem spune asadar ca sistemul este *neconditionat instabil*.

Specificul exemplului este succesiunea de singularitati, toate reale si situate in semiplanul complex sting.

Succesiunea de doi poli si doua zarouri (sau zerou si divergenta la infinit) face ca doua ramuri ale **L.R.** sa fie pe axa reala la valori mici ale lui K si sa paraseasca simetric si perpendicular axa la valori medii ale lui K si sa revina pe axa reala la valori mari ale lui K .

Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind metoda locului radacinilor

Partea III: Exemple (continuare)

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Reguli de trasare rapida a locului radacinilor	1
Reactie negativa	1
Reactie pozitiva.....	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
Exemplul III	2
Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$	2
Reactie negativa	2
Trasarea rapida a L.R.	2
Animatie	3
Reactie pozitiva.....	3
Trasarea rapida a L.R.	3
Animatie	4

Breviar teoretic

Chestiuni teoretice sunt descrise in Partea I a laboratorului.

Reguli de trasare rapida a locului radacinilor

Consideram functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$ cu P poli, notati $p_k, k = 1 .. P$ si Z zerouri, noteate $z_l, l = 1 .. Z$.

Sunt reamintite pe scurt formulele importante de calcul.

Reactie negativa

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{K A(s)}{1 + K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote are ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele:

$$xCg = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad yCg = 0.$$

Cele $P - Z$ asymptote are ramurilor care tind spre infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{P-Z}, \quad i = 1 .. P - Z$$

Ramurile de pe axa reala ale **L.R.** sunt situate la stanga unui numar impar de singularitati (poli si zerouri).

Reactie pozitiva

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele

$$x_{Cg} = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad y_{Cg} = 0$$

in planul complex.

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind la infinit formeaza cu axa reala unghiurile

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{P - Z}, \quad i = 1 \dots P - Z$$

Ramurile de pe axa reala ale L.R. sunt situate la stanga unui numar par de singularitati.(poli si zerouri).

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlib**.

Pentru calcularea functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)

Pentru reprezentarea locului radacinilor, in plan si in spatiu, corespunzator sistemului cu reactie:

- functia **LocRad[plan]** [help](#)
- functia **LocRad[spatiu]** [help](#)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlib",libname;
> with(LinearAlgebra);
> rp := 'reactie = pozitiva':rn := 'reactie = negativa':
```

Exemple

Exemplul III

Ne propunem sa studiem stabilitatea unui sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara este:

```
> Hd:=s*(s+10)/((s+1)*(s^2+s+100)*(s+100));
```

$$Hd := \frac{s(s+10)}{(s+1)(s^2+s+100)(s+100)}$$

Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa Hd(s)

```
> p:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=poli):P:= RowDimension(p);
P := 4
```

```
> z:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=zerouri):Z:= RowDimension(z);
Z := 2
```

```
> PZ[numeric](Hd,s);
```

$$\begin{bmatrix} z1 & 0. \\ z2 & -10. \\ p1 & -.5000 + 9.987 I \\ p2 & -1. \\ p3 & -100. \\ p4 & -.5000 - 9.987 I \end{bmatrix}$$

Reactie negativa

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tind spre infinit se intersecteaza in centrul de greutate de coordonate:

```
> xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;
xCg := -46.00000000
```

$$yCg := 0$$

Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

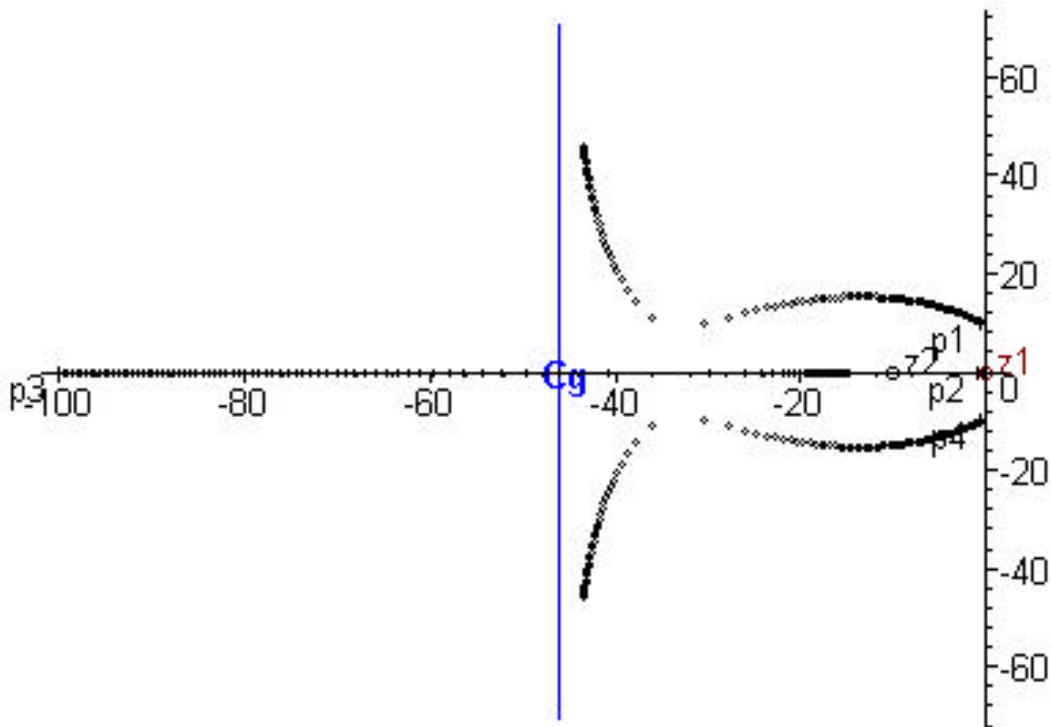
> **theta:=seq((2*i+1)*Pi/(P-Z),i=0..P-Z-1);**

$$\theta := \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right]$$

Locul radacinilor pentru *reactie negativa* este:

> **LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..5000);**

Locul radacinilor pentru reactie negativa

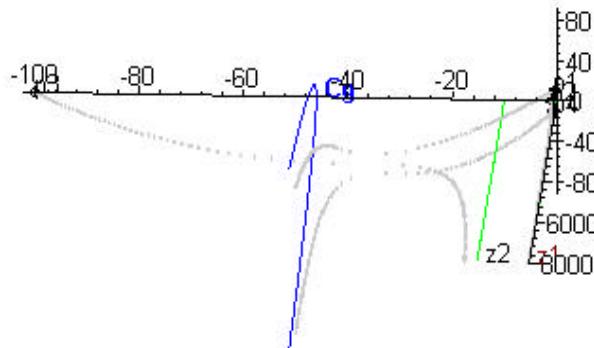


Animatie

> **LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..5000,tipgrafic=dinamic);**

> **LocRad[spatiu](Hd,rn,interval=0..8000,tipgrafic=dinamic);**

Locul radacinilor pentru reactie negativa



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterioare, observam ca toate ramurile **L.R.** sunt situate in totalitate in semiplanul complex sting. Putem spune asadar ca sistemul cu *reactie negativa* este *neconditionat stabil*.

Reactie pozitiva

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tinde spre infinit, are originea in centrul de greutate de coordonate:

> **xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;**

$$xCg := -46.00000000$$

$$yCg := 0$$

Aсимптота ramurii care тинде la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

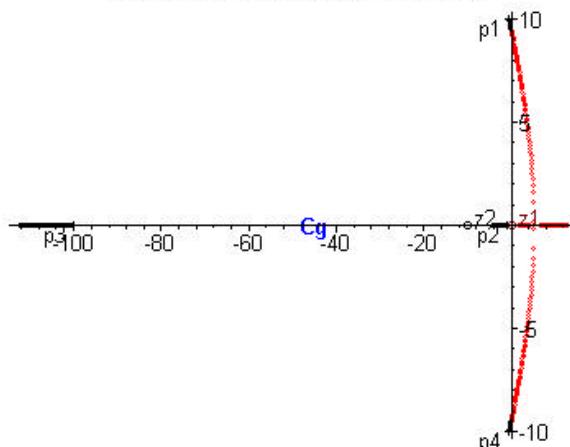
> **theta:=[seq(2*i*Pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];**

$$\theta := [0, \pi]$$

Locul radacinilor pentru *reactiei pozitiva* este:

> **LocRad[plan](Hd, rp, interval=0..1500);**

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva

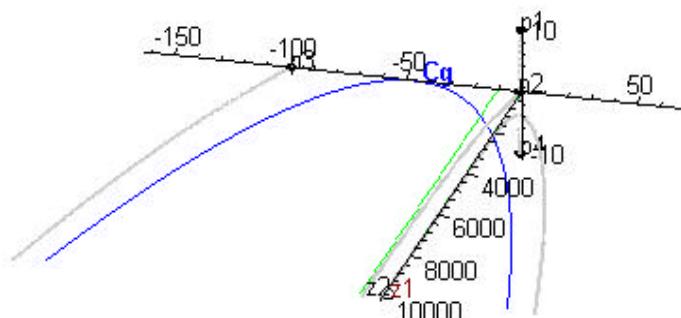


Animatie

> **LocRad[plan](Hd, rp, interval=0..1500, tipgrafic=dinamic);**

> **LocRad[spatiu](Hd, rp, interval=0..10000, tipgrafic=dinamic);**

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterior, observam ca exista o valoare limita $K=K_1$ cind la cresterea lui K , doua ramuri trec din semiplanul sting in semiplanul drept. Pentru valori mici ale lui K ($K < K_1$), toate cele 3 ramuri sunt in semiplan sting iar pentru valori mari ale lui K ($K > K_1$) 2 ramuri sunt in semiplanul drept. Putem spune asadar ca sistemul cu reactie pozitiva este *neconditionat instabil (stabil)*.

Specificul exemplului este perechea de poli complex conjugati din semiplanul sting. La reactie pozitiva, ramurile care pleaca din acesti poli ajung pe axa reala in semiplanul drept. La reactie negativa, ramurile diverg la infinit prin semiplanul sting.

Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind metoda locului radacinilor

Partea IV: Exemple (continuare)

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Reguli de trasare rapida a locului radacinilor	1
Reactie negativa	1
Reactie pozitiva.....	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
Exemplul IV	2
Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$	2
Reactie negativa	2
Trasarea rapida a L.R.	2
Animatie	3
Reactie pozitiva.....	3
Trasarea rapida a L.R.	3
Animatie	4

Breviar teoretic

Chestiuni teoretice sunt descrise in Partea I a laboratorului.

Reguli de trasare rapida a locului radacinilor

Consideram functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$ cu P poli, notati $p_k, k=1..P$ si Z zerouri, noteate $z_l, l=1..Z$.

Sunt reamintite pe scurt formulele importante de calcul.

Reactie negativa

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{K A(s)}{1 + K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote are ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele:

$$x_{Cg} = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad y_{Cg} = 0.$$

Cele $P - Z$ asymptote are ramurilor care tind spre infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{P-Z}, \quad i = 1..P-Z$$

Ramurile de pe axa reala ale **L.R.** sunt situate la stanga unui numar impar de singularitati (poli si zerouri).

Reactie pozitiva

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele

$$x_{Cg} = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad y_{Cg} = 0$$

in planul complex.

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind la infinit formeaza cu axa reala unghiurile

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{P - Z}, \quad i = 1 \dots P - Z$$

Ramurile de pe axa reala ale L.R. sunt situate la stanga unui numar par de singularitati.(poli si zerouri).

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlib**.

Pentru calcularea functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)

Pentru reprezentarea locului radacinilor, in plan si in spatiu, corespunzator sistemului cu reactie:

- functia **LocRad[plan]** [help](#)
- functia **LocRad[spatiu]** [help](#)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlib",libname;
> with(LinearAlgebra);
> rp := 'reactie = pozitiva':rn := 'reactie = negativa':
```

Exemple

Exemplul IV

Ne propunem sa studiem stabilitatea unui sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara este:

```
> Hd:=s*(s+3)/((s+5)*(s^2-0.1*s+1));
```

$$Hd := \frac{s(s+3)}{(s+5)(s^2 - .1s + 1)}$$

Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa Hd(s)

```
> p:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=poli):P:= RowDimension(p);
P := 3
```

```
> z:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=zerouri):Z:= RowDimension(z);
Z := 2
```

```
> PZ[numeric](Hd,s);
```

$$\begin{bmatrix} z1 & 0. \\ z2 & -3. \\ p1 & .05000 + .9987I \\ p2 & -5. \\ p3 & .05000 - .9987I \end{bmatrix}$$

Reactie negativa

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tind spre infinit intersecteaza in centrul de greutate de coordonate:

```
> xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;
xCg := -1.90000
```

$$y_{Cg} := 0$$

Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

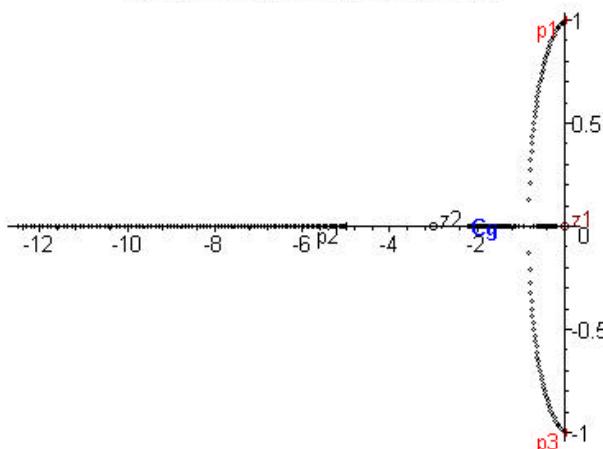
> `theta:=[seq((2*i+1)*Pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];`

$$\theta := [\pi]$$

Locul radacinilor pentru *reactie negativa* este:

> `LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..10);`

Locul radacinilor pentru reactie negativa

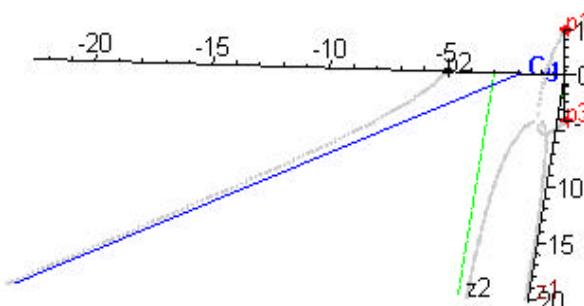


Animatie

> `LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..10,tipgrafic=dinamic);`

> `LocRad[spatiu](Hd,rn,interval=0..20,tipgrafic=dinamic);`

Locul radacinilor pentru reactie negativa



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterioare, observam ca o pereche de poli complex conjugati sunt in semiplanul complex drept. La valori mici ale lui K ($K < K_1$) punctele ramurii ale **L.R.** sunt situate in semiplanul stang. Pentru valori mari ale lui K ($K > K_2$) toate ramurile **L.R.** sunt situate in semiplanul complex stang. Putem spune asadar ca sistemul cu *reactie negativa* este *conditionat stabil (instabil)*.

Reactie pozitiva

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tinde spre infinit, are originea in centrul de greutate de coordonate:

> `xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;`

$$xCg := -1.90000$$

$$yCg := 0$$

Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

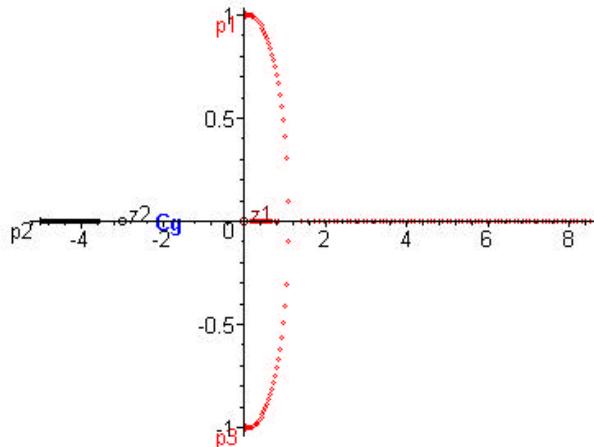
> `theta:=[seq(2*i*Pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];`

$$\theta := [0]$$

Locul radacinilor pentru *reactie pozitiva* este:

> `LocRad[plan](Hd,RP,interval=0..10);`

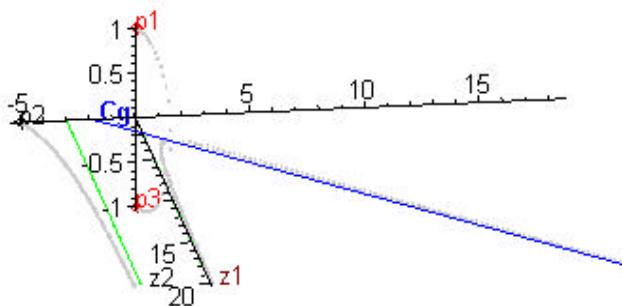
Locusul radacinilor pentru reactie pozitiva



Animatie

> **LocRad[plan](Hd,rp,interval=0..10,tipgrafic=dinamic);**
 > **LocRad[spatiu](Hd,rp,interval=0..20,tipgrafic=dinamic);**

Locusul radacinilor pentru reactie pozitiva



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterior, observam ca 2 din cele 3 ramuri sunt in semiplanul drept. Putem spune asadar ca sistemul cu reactie pozitiva este *neconditionat instabil*.

Specificul exemplului este perechea de poli complex conjugati din semiplanul drept. La reactie pozitiva, sistemul este instabil. La reactie negativa, sistemul poate fi stabil la valori mari ale lui K.

Studiul stabilitatii circuitelor liniare folosind metoda locului radacinilor

Partea V: Exemple (continuare)

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Iasi, Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

<http://scs4/etc.tuiasi.ro>

Breviar teoretic	1
Reguli de trasare rapida a locului radacinilor	1
Reactie negativa	1
Reactie pozitiva.....	1
Mod de lucru	2
Exemple	2
Exemplul IV	2
Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$	2
Reactie negativa	2
Trasarea rapida a L.R.	2
Animatie	3
Reactie pozitiva.....	3
Trasarea rapida a L.R.	3
Animatie	4

Breviar teoretic

Chestiuni teoretice sunt descrise in Partea I a laboratorului.

Reguli de trasare rapida a locului radacinilor

Consideram functia de transfer in bucla deschisa $Hd(s) = K A(s) B(s)$ cu P poli, notati $p_k, k=1..P$ si Z zerouri, noteate $z_l, l=1..Z$.

Sunt reamintite pe scurt formulele importante de calcul.

Reactie negativa

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$Hr(s) = \frac{K A(s)}{1 + K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote are ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele:

$$x_{Cg} = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad y_{Cg} = 0.$$

Cele $P - Z$ asymptote are ramurilor care tind spre infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{P-Z}, \quad i = 1..P-Z$$

Ramurile de pe axa reala ale **L.R.** sunt situate la stanga unui numar impar de singularitati (poli si zerouri).

Reactie pozitiva

Functia de transfer a circuitului cu reactie este:

$$H_r(s) = \frac{K A(s)}{1 - K A(s) B(s)}.$$

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind spre infinit se intalnesc intr-un punct numit *centru de greutate*, (Cg), care are coordonatele

$$xCg = \frac{\left(\sum_{k=1}^P \operatorname{Real}(p_k) \right) - \left(\sum_{l=1}^Z \operatorname{Real}(z_l) \right)}{P - Z}, \quad yCg = 0$$

in planul complex.

Cele $P - Z$ asimptote ale ramurilor care tind la infinit formeaza cu axa reala unghiurile

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{P - Z}, \quad i = 1 \dots P - Z$$

Ramurile de pe axa reala ale L.R. sunt situate la stanga unui numar par de singularitati.(poli si zerouri).

Mod de lucru

In afara de functiile incluse in libraria standard Maple, in aceasta lucrare vor fi utilizate cateva functii din libraria aditionala **SCSlib**.

Pentru calcularea functiei de transfer in bucla deschisa:

- functia **PZ[numeric]** [help](#)

Pentru reprezentarea locului radacinilor, in plan si in spatiu, corespunzator sistemului cu reactie:

- functia **LocRad[plan]** [help](#)
- functia **LocRad[spatiu]** [help](#)

```
> restart;
> libname:=".//SCSlib",libname;
> with(LinearAlgebra);
> rp := 'reactie = pozitiva':rn := 'reactie = negativa':
```

Exemple

Exemplul IV

Ne propunem sa studiem stabilitatea unui sistem cu reactie pentru care functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara este:

```
> Hd:=1/(s+1)*(s^2+s+1);
```

$$Hd := \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

Poli si zerourile functiei de transfer in bucla deschisa Hd(s)

```
> p:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=poli):P:= RowDimension(p);
P := 3
```

```
> z:=PZ[numeric](Hd,s,singularitati=zerouri):Z:= RowDimension(z);
Z := 0
```

```
> PZ[numeric](Hd,s);
```

$$\begin{bmatrix} p1 & -.5000 + .8660I \\ p2 & -1. \\ p3 & -.5000 - .8660I \end{bmatrix}$$

Reactie negativa

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tind spre infinit intersecteaza in centrul de greutate de coordonate:

```
> xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;
xCg := -.6666666667
```

$$yCg := 0$$

Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

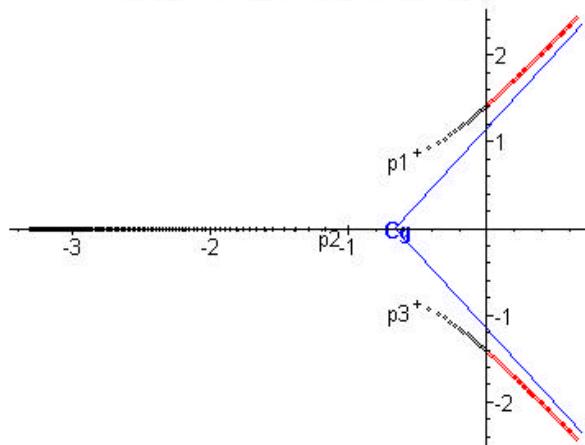
```
> theta:=[seq((2*i+1)*Pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];
```

$$\theta := \left[\frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi \right]$$

Locul radacinilor pentru *reactie negativa* este:

> **LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..20);**

Locul radacinilor pentru reactie negativa

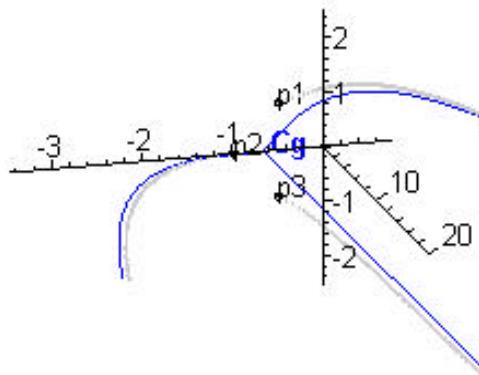


Animatie

> **LocRad[plan](Hd,rn,interval=0..20,tipgrafic=dinamic);**

> **LocRad[spatiu](Hd,rn,interval=0..20,tipgrafic=dinamic);**

Locul radacinilor pentru reactie negativa



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterioare, observam ca ramurile care pleaca din perechea de poli complex conjugati din semiplanul complex sting la $K=0$, pentru valori mici ale amplificarii K ($K < K_1$) sunt in semiplanul stang iar pentru valori mari ale amplificarii K ($K > K_1$) sunt in semiplanul drept. Putem spune asadar ca sistemul cu *reactie negativa* este *conditionat stabil (instabil)*.

Reactie pozitiva

Trasarea rapida a L.R.

Asimptota ramurii care tinde spre infinit, are originea in centrul de greutate de coordonate:

> **xCg:=(sum('Re(p[k,2])','k'=1..P)-sum('Re(z[l,2])','l'=1..Z))/(P-Z);yCg:=0;**

$$xCg := -0.666666667$$

$$yCg := 0$$

Asimptota ramurii care tinde la infinit formeaza cu axa reala unghiurile:

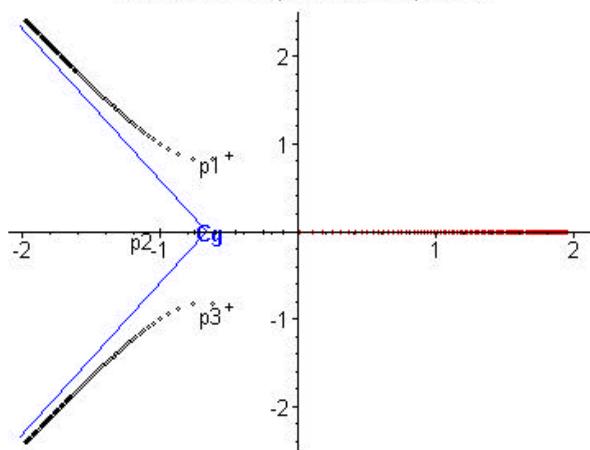
> **theta:=[seq(2*i*pi/(P-Z),i=0..P-Z-1)];**

$$\theta := \left[0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right]$$

Locul radacinilor pentru *reactie pozitiva* este:

> **LocRad[plan](Hd, rp, interval=0..20);**

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva

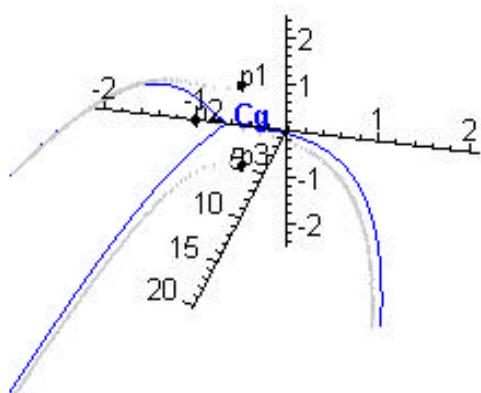


Animatie

> **LocRad[plan](Hd, rp, interval=0..20, tipgrafic=dinamic);**

> **LocRad[spatiu](Hd, rp, interval=0..20, tipgrafic=dinamic);**

Locul radacinilor pentru reactie pozitiva



Discutia de stabilitate

Pe baza graficelor anterior, observam ca o ramura este pe axa reala in semiplanul drept. Putem spune asadar ca sistemul cu reactie pozitiva este *neconditionat instabil*.

Specificul exemplului este perechea de poli complex conjugati din semiplanul sting. La reactie pozitiva, sistemul este instabil. La reactie negativa, sistemul poate fi stabil sau instabil. Asimptotele sunt in numar de 3 .

Functiile din libraria SCSlib: descriere si utilizare

Universitatea Tehnica "Gh. Asachi", Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme

Functia Bode[castig].....	2
Functia Bode[faza]	3
Functia Bode[polara]	4
Functia LocRad[plan]	5
Functia LocRad[spatiu]	6
Functia Nyquist[contur]	7
Functia Nyquist[diagrama]	8
Functia PZ[numeric]	9
Functia PZ[grafic]	10
Functia SFC	11
Functia SFR	11
Functia FOURIER	11
Functia ts.....	12
Functia cs.....	12
Functia rpa	13

Functia Bode[castig]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **Bode** si este dedicata reprezentarii diagramei Bode de castig a functiei de transfer de regim permanent a unui sistem liniar (invariabil in timp).

Functia returneaza un grafic care contine:

- diagrama Bode de castig a functiei de transfer de regim permanent pe un interval suficient de larg pentru a surprinde toate variatiile semnificative ale functiei castig
- diagrama Bode de castig liniarizata pe portiuni a functiei de transfer de regim permanent pe acelasi interval amintit mai sus
- asimptotele verticale ale functiei castig, in situatia in care functia de transfer are poli nenuli pe axa imaginara
- un grid orizontal si un grid vertical adecvate incadrarii diagramelor de mai sus.

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 3 argumente

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s, cu coeficienti complecsi, care reprezinta functia de transfer pentru care doreste trasarea diagramei de castig.

Optionale:

Celelalte doua argumente in afara de primul sunt optionale. Cele doua argumente optionale pot fi de tipul:

- *selectie* = $[x_1 \dots x_2, y_1 \dots y_2]$,

unde $x_1 \dots x_2$ este un interval de numere reale sau **DEFAULT**, iar $y_1 \dots y_2$ este un interval de numere reale sau **DEFAULT**.

Acest argument, daca este prezent, stabileste fereastra de vizualizare.

Valoarea implicita pentru $[x_1 \dots x_2, y_1 \dots y_2]$ este **[DEFAULT, DEFAULT]**, caz in care fereastra de vizualizare contine toate variatiile semnificative ale functiei castig pe intervalul de reprezentare.

- *numarpuncte* = *numar_puncte*

unde *numar_puncte* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita pentru *numar_puncte* este **100**.

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **Bode**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(Bode):

castig():

- ca o functie independenta:

Bode[castig]():

Exemple

```
> restart:  
> libname:=".~/SCSlib",libname:  
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));  
> with(Bode):  
> castig(H):  
> castig(H,numarpuncte=200,selectie=[-1..1,-100..-20]):  
  
> restart:  
> libname:=".~/SCSlib",libname:  
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));  
> Bode[castig](H):  
> Bode[castig](H,numarpuncte=200,selectie=[-1..1,-100..-20]):
```

Functia Bode[faza]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **Bode** si este dedicata reprezentarii diagramei Bode de faza a functiei de transfer de regim permanent a unui sistem liniar (invariabil in timp).

Functia returneaza un grafic care contine:

- diagrama Bode de faza a functiei de transfer de regim permanent pe un interval suficient de larg pentru a surprinde toate variatiile semnificative ale functiei faza
- diagrama Bode de faza liniarizata pe portiuni a functiei de transfer de regim permanent pe acelasi interval amintit mai sus
- un grid orizontal si un grid vertical adevarate incadrarii diagramelor de mai sus.

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 3 argumente

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s, cu coeficienti complecsi, care reprezinta functia de transfer pentru care doreste trasarea diagramei de faza.

Optionale:

Celelalte doua argumente in afara de primul sunt optionale. Cele doua argumente optionale pot fi de tipul:

- *selectie* = $[x_1 \dots x_2, y_1 \dots y_2]$,

unde $x_1 \dots x_2$ este un interval de numere reale sau **DEFAULT**, iar $y_1 \dots y_2$ este un interval de numere reale sau **DEFAULT**.

Acest argument, daca este prezent, stabileste fereastra de vizualizare.

Valoarea implicita pentru $[x_1 \dots x_2, y_1 \dots y_2]$ este **[DEFAULT, DEFAULT]**, caz in care fereastra de vizualizare contine toate variatiile semnificative ale functiei faza pe intervalul de reprezentare.

- *numarpuncte* = *numar_puncte*

unde *numar_puncte* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita pentru *numar_puncte* este 100.

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **Bode**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(Bode):

faza():

- ca o functie independenta:

Bode[faza]():

Exemple

```
> restart:  
> libname:="~/SCSlib",libname:  
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));  
> with(Bode):  
> faza(H);  
> faza(H,selectie=[1..4,-1..1],numarpuncte=800);  
  
> restart:  
> libname:="~/SCSlib",libname:  
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));  
> Bode[faza](H);  
> Bode[faza](H,selectie=[1..4,-1..1],numarpuncte=800);
```

Functia Bode[polara]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **Bode** si este dedicata reprezentarii diagramei polare a functiei de transfer de regim permanent a unui sistem liniar (invariabil in timp).

Functia returneaza un grafic care contine:

- diagrama polara a functiei de transfer de regim permanent pe un interval suficient de larg pentru a surprinde toate variatiile semnificative ale functiei de transfer
- un grid radial si un grid concentric adevarate incadrarii diagramei polare

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 4 argumente

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s , cu coeficienti complexi, care reprezinta functia de transfer pentru care se doreste trasarea diagramei polare.

Optionale:

Celelalte trei argumente in afara de primul sunt optionale. Cele trei argumente optionale pot fi de tipul:

- $interval = x_1 \dots x_2$,

unde $x_1 \dots x_2$ este un interval de numere reale pozitive.

Acest argument, daca este prezent, stabileste intervalul pe care reprezentata diagrama polara.

Valoarea implicita pentru $x_1 \dots x_2$ este $[.01 \min(|s_k|) \dots 100 \max(|s_k|)]$, unde s_k sunt singularitatatile nenule ale functiei de transfer.

- $numarpuncte = numar_puncte$

unde $numar_puncte$ este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita pentru $numar_puncte$ este 100.

- $compresie = [compresie_modul, compresie_faza]$,

unde $compresie_modul$ si $compresie_faza$ sunt numere reale pozitive.

Acest argument, daca este prezent, determina o compresie de faza si sau modul a diagramei polare.

Valoarea implicita pentru $[compresie_modul, compresie_faza]$ este $[1, 1]$, caz in care diagrama polara este nedeformata.

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **Bode**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(Bode):

faza():

- ca o functie independenta:

Bode[faza]():

Exemple

```
> restart;
> libname:=".SCSlib",libname;
> with(Bode);
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));
> polara(H);
> polara(H,numarpuncte=5000,compresie=[4,1],interval=0.1..10000);

> restart;
> libname:=".SCSlib",libname;
> H:=s^2*(s+100)/((s+1)*(s^2+1*s+100)*(s+1000));
> Bode[polara](H);
> Bode[polara](H,numarpuncte=5000,compresie=[4,1],interval=0.1..10000);
```

Functia LocRad[plan]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **LocRad** si este dedicata reprezentarii in plan a locului radacinilor pentru un sistem liniar (invariabil in timp) cu reactie.

Functia returneaza un grafic care contine:

- locul radacinilor pentru sistemul cu reactie.
- asimptotele locului radacinilor si punctul de intersectie al acestora (centrul de greutate)
- singularitatile functiei de transfer a sistemului in bucla deschisa

Argументe

Functia accepta minim 1 argument si maxim 5 argumente

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s, cu coeficienti complecsi. Aceasta functie reprezinta functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara.

Optionale:

Celelalte trei argumente in afara de primul sunt optionale. Cele trei argumente optionale pot fi de tipul:

- $\text{interval} = x_1 \dots x_2$,

unde $x_1 \dots x_2$ este un interval de numere reale.

Acest argument, daca este prezent, stabileste intervalul de reprezentare al locului radacinilor.

Valoarea implicita pentru $x_1 \dots x_2$ este $[-10 \dots 10]$.

- $\text{numarpuncte} = \text{numar_puncte}$

unde numar_puncte este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita pentru numar_puncte este 100.

- $\text{reactie} = \text{tip_reactie}$,

unde tip_reactie este unul din {pozitiva, negativa}.

Acest argument, daca este prezent, stabileste tipul reactiei.

Valoarea implicita pentru tip_reactie este pozitiva .

- $\text{tipgrafic} = \text{tip_grafic}$,

unde tip_grafic este unul din {static, dinamic}.

Acest argument daca este prezent, stabileste daca reprezentarea este dinamica sau statica.

Valoarea implicita pentru tip_grafic este static .

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **LocRad**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(LocRad):

plan():

- ca o functie independenta:

LocRad[plan]():

Exemple

```
> restart;
> libname:="~/SCSlib",libname;
> with(LocRad):
> H:=(s-10)/((s^2-5*s+100)*(s^2+5*s+100));
> plan(H);
> plan(H,interval=0..10000,reactie=negativa,numarpuncte=100,tipgrafic=dinamic);
> restart;
> libname:="~/SCSlib",libname;
> H:=(s-10)/((s^2-5*s+100)*(s^2+5*s+100));
> LocRad[plan](H);
> LocRad[plan](H,interval=0..10000,reactie=negativa,numarpuncte=100,tipgrafic=dinamic);
```

Functia LocRad[spatiu]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **LocRad** si este dedicata reprezentarii in spatiu (a treia axa fiind amplificarea) a locului radacinilor pentru un sistem liniar (invariabil in timp) cu reactie.

Functia returneaza un grafic care contine:

- locul radacinilor pentru sistemul cu reactie.
- asimptotele locului radacinilor si punctul de intersectie al acestora (centrul de greutate)
- singularitatile functiei de transfer a sistemului in bucla deschisa

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 5 argumente

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s, cu coeficienti complecsi. Aceasta functie reprezinta functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara.

Optionale:

Celelalte patru argumente in afara de primul sunt optionale. Cele trei argumente optionale pot fi de tipul:

- *interval* = $x_1 \dots x_2$,

unde $x_1 \dots x_2$ este un interval de numere reale.

Acest argument, daca este prezent, stabileste intervalul de reprezentare al locului radacinilor.

Valoarea implicita pentru $x_1 \dots x_2$ este $[-10 \dots 10]$.

- *numarpuncte* = *numar_puncte*

unde *numar_puncte* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita pentru *numar_puncte* este 100.

- *reactie* = *tip_reactie*,

unde *tip_reactie* este unul din {*pozitiva*, *negativa*}.

Acest argument, daca este prezent, stabileste tipul reactiei.

Valoarea implicita pentru *tip_reactie* este *pozitiva*.

- *tipgrafic* = *tip_grafic*,

unde *tip_grafic* este unul din {*static*, *dinamic*}.

Acest argument daca este prezent, stabileste daca reprezentarea este dinamica sau statica.

Valoarea implicita pentru *tip_grafic* este *static*.

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **LocRad**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(LocRad):

spatiu():

- ca o functie independenta:

LocRad[spatiu]():

Exemple

```
> restart;
> libname:=".SCSlib",libname;
> H:=(s-10)/((s^2-5*s+100)*(s^2+5*s+100));
> with(LocRad);
> spatiu(H);
> LocRad[spatiu](H,interval=0..40000,reactie=pozitiva,numarpuncte=200,tipgrafic=static);
> restart;
> libname:=".SCSlib",libname;
> H:=(s-10)/((s^2-5*s+100)*(s^2+5*s+100));
> LocRad[spatiu](H);
> LocRad[spatiu](H,interval=0..40000,reactie=pozitiva,numarpuncte=200,tipgrafic=static);
```

Functia Nyquist[contur]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **Nyquist** si este dedicata reprezentarii conturului Nyquist pentru un sistem liniar (invariabil in timp) cu reactie .

Functia returneaza un grafic care contine:

- conturul Nyquist
- singularitatile functiei de transfer a sistemului in bucla deschisa

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 5 argumente.

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s, cu coeficienti complecsi. Aceasta functie reprezinta functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara.

Optionale:

Celelalte patru argumente in afara de primul sunt optionale. Cele trei argumente optionale pot fi de tipul:

- *npuncte = numar_puncte* ,

unde *N* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita este *200*.

- *compresie=[compresie_modul, compresie_faza]* ,

unde *compresie_modul* si *compresie_faza* sunt numere reale pozitive.

Acest argument, daca este prezent, determina compresia de faza si sau modul a conturului Nyquist.

Valoarea implicita pentru *[compresie_modul, compresie_faza]* este *[1, 1]* .

- *tipgrafic = tip_grafic* ,

unde *tip_grafic* este unul din *{static, dinamic}* .

Acest argument daca este prezent, stabileste daca reprezentarea este dinamica sau statica.

Valoarea implicita pentru *tip_grafic* este *static* .

- *nimagini = numar_imagini* ,

unde *numar_imagini* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument daca este prezent, stabileste numarul de frame-uri in cazul reprezentarii dinamice.

Valoarea implicita pentru *numar_imagini* este *20* .

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **Nyquist**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(Nyquist):

contur():

- ca o functie independenta:

Nyquist[contur]():

Exemple

```
> restart:  
> libname:="..../SCSlib",libname:  
> H:=s*(s+1)/((s^2+1)*(s^2+0.01*s+100));  
> with(Nyquist):  
> contur(H);  
> contur(H,compresie=[4,2],npuncte=200,tipgrafic=dinamic,nimagini=50);
```

```
> restart:  
> libname:="..../SCSlib",libname:  
> H:=s*(s+1)/((s^2+1)*(s^2+0.01*s+100));  
> Nyquist[contur](H);  
> Nyquist[contur](H,compresie=[4,2],npuncte=200,tipgrafic=dinamic,nimagini=50);
```

Functia Nyquist[diagrama]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **Nyquist** si este dedicata reprezentarii diagramei Nyquist pentru un sistem liniar (invariabil in timp) cu reactie.

Functia returneaza un grafic care contine:

- diagrama Nyquist
- reperele in raport cu care se calculeaza numarul de inconjururi

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 6 argumente[npuncte,compresie,tipgrafic,nimagini,repere]:

Obligatorii:

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s, cu coeficienti complecsi. Aceasta functie reprezinta functia de transfer in bucla deschisa la amplificare unitara.

Optionale:

Celelalte sase argumente in afara de primul sunt optionale. Cele sase argumente optionale pot fi de tipul:

- *npuncte = numar_puncte* ,

unde *numar_puncte* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte utilizat la reprezentare.

Valoarea implicita pentru *numar_puncte* este **200**.

- *compresie= [compresie_modul, compresie_faza]* ,

unde *compresie_modul* , *compresie_faza* sunt numere reale pozitive.

Acest argument, daca este prezent, determina compresia de faza si sau modul a conturului Nyquist.

Valoarea implicita pentru *[compresie_modul, compresie_faza]* este **[1, 1]** , caz in care conturul este nedefomat.

- *tipgrafic = tip_grafic* ,

unde *tip_grafic* este unul din *static* sau *dinamic* .

Acest argument daca este prezent, stabileste daca reprezentarea este dinamica sau statica.

Valoarea implicita pentru *tip_grafic* este *static* .

- *nimagini = numar_imagini* ,

unde *numar_imagini* este un numar intreg pozitiv.

Acest argument daca este prezent, stabileste numarul de frame-uri in cazul reprezentarii dinamice.

Valoarea implicita pentru *numar_imagini* este **20** .

- *repere=[seventa_numere_complexe]* ,

unde *seventa_numere_complexe* este o seventa de numere complexe.

Acest argument daca este prezent, stabileste reperele in raport cu care se doreste determinarea numarului de inconjururi ale diagramei Nyquist.

Valoarea implicita pentru *seventa_numere_complexe* este **[-1, 1]**

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **Nyquist**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(Nyquist):

diagrama():

- ca o functie independenta:

Nyquist[diagrama]():

Exemple

> **restart:**

> **libname:="..\\SCSlib",libname:**

> **H:=s*(s+1)/((s^2+1)*(s^2+0.01*s+100)):**

> **with(Nyquist):**

> **diagrama(H):**

> **diagrama(H,compresie=[4,2],npuncte=200,tipgrafic=dinamic,nimagini=50,repere=[-1,1]):**

```
> restart;
> libname:="..../SCSlib",libname;
> H:=s*(s+1)/((s^2+1)*(s^2+0.01*s+100));
> Nyquist[contur](H);
> Nyquist[contur](H,compresie=[4,2],npuncte=200,tipgrafic=dinamic,nimagini=50,repere=[-1,1]);
```

Functia PZ[numeric]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul si este **PZ** si este dedicata determinarii singularitatilor un sistem liniar (invariabil in timp), discret sau analogic.

Functie returneaza un tabel care contine aceste singularitati.

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 2 argumente.

Obligatorii

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s sau z cu coeficienti complecsi. Aceasta fractie reprezinta functia de transfer a sistemului liniar pentru care se doreste determinarea singularitatilor.

Optionale

Al doilea argument al functiei este optional. Acest argument poate fi de tipul:

- *singularitati = tip_singulatitati* ,
unde *tip_singulatitati* este unul din { *poli*, *zerouri*, *toate* } .

Acest argument, daca este prezent, determina tipul singularitatilor afisate.

Valoarea implicita pentru *tip_singulatitati* este *toate* .

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **PZ**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(PZ):

numeric():

- ca o functie independenta:

PZ[numeric]():

Exemple

```
> restart;
> libname:="..../SCSlib",libname;
> H:=(s^2-s+100)/(s^2*(s^4-s+10000));
> with(PZ):
> numeric(H,s);
> numeric(H,s,singularitati=poli);

> restart;
> libname:="..../SCSlib",libname;
> H:=(s^2+s+1)/(s^2*(s^4+s+1));
> PZ[numeric](H,s);
> PZ[numeric](H,s,singularitati=poli);
```

Functia PZ[grafic]

Descriere

Aceasta functie face parte din pachetul **PZ** si este dedicata reprezentarii in planul complex a singularitatilor un sistem liniar (invariabil in timp), discret sau analogic.

Functia returneaza un grafic care contine aceste singularitati.

Argumente

Functia accepta minim 1 argument si maxim 2 argumente.

Obligatorii

Primul argument al functiei este obligatoriu si trebuie sa fie o fractie rationala in variabila s sau z cu coeficienti complecsi. Aceasta fractie reprezinta functia de transfer a sistemului liniar pentru care se doreste determinarea singularitatilor.

Optionale

Al doilea argument al functiei este optional. Acest argument poate fi de tipul:

- $\text{singularitati} = \text{tip_singularitati}$,

unde tip_singularitati este unul din $\{\text{poli}, \text{zerouri}, \text{toate}\}$.

Acest argument, daca este prezent, determina tipul singularitatilor afisate.

Valoarea implicita pentru tip_singularitati este toate .

- $\text{compresie} = \text{flag}$,

unde flag este unul din $\{\text{true}, \text{false}\}$.

Valoarea implicita pentru flag este false .

Utilizare

Aceasta functie poate fi apelata in doua moduri:

- in cadrul pachetului **PZ**, caz in care este necesara incarcarea prealabila a acestui pachet:

with(PZ):

grafic():

- ca o functie independenta:

PZ[grafic]():

Exemple

```
> restart:  
> libname:=".//SCSlib",libname:  
> H:=(s^2-s+100)/(s^2*(s^4-s+10000)):  
> with(PZ):  
> grafic(H,s):  
> grafic(H,s,compresie=true):  
  
> restart:  
> libname:=".//SCSlib",libname:  
> H:=(s^2-s+100)/(s^2*(s^4-s+10000)):  
> PZ[grafic](H,s):  
> PZ[grafic](H,s,compresie=true):
```

Functia SFC

Descriere

Aceasta functie este dedicata descompunerii unei functii periodice in serie Fourier complexa.
Functia returneaza seria Fourier complexa a semnalului periodic.

Argumente

Functia accepta exact 2 argumente:

- Primul argument trebuie sa fie o expresie (diferita de o constanta) periodica in raport cu o variabila.
- Al doilea argument trebuie sa fie un nume, care reprezinta variabila independenta in raport cu care expresia este periodica.

Utilizare

Aceasta functie poate fi ca o functie independenta:

SFC():

Exemple

```
> restart:  
> libname:="..../SCSlib",libname:  
> s:=sum(Heaviside(t+tau-n*T)-Heaviside(t-tau-n*T),'n'=-infinity..infinity):  
> SFC(s,t):
```

Functia SFR

Descriere

Aceasta functie este dedicata descompunerii unei functii periodice in serie Fourier reala.
Functia returneaza seria Fourier reala a semnalului periodic.

Argumente

Functia accepta exact 2 argumente:

- Primul argument trebuie sa fie o expresie (diferita de o constanta) periodica in raport cu o variabila.
- Al doilea argument trebuie sa fie un nume, care reprezinta variabila independenta in raport cu care expresia este periodica.

Utilizare

Aceasta functie se apeleaza ca o functie independenta:

SFR():

Exemple

```
> restart:  
> libname:="..../SCSlib",libname:  
> s:=sum(Heaviside(t+tau-n*T)-Heaviside(t-tau-n*T),'n'=-infinity..infinity):  
> SFR(s,t):
```

Functia FOURIER

Descriere

Aceasta functie este dedicata imbunatatirii performantelor transformatei Fourier in cazul expresiilor periodice in raport cu o anumita variabila.

Functia returneaza transformata Fourier a unei expresii.

Argumente

Functia accepta exact 3 argumente:

- Primul argument trebuie sa fie o expresie, care reprezinta expresia pentru care se doreste calcularea

transformatei Fourier.

- Al doilea argument trebuie sa fie un nume, care reprezinta variabila independenta care intervine in expresie
- Al treilea argument trebuie sa fie un nume, care reprezinta variabila independenta care intervine in transformata Fourier.

Utilizare

Aceasta functie se apeleaza ca o functie independenta:

FOURIER():

Exemple

```
> restart:  
> libname:=".SCSlib",libname:  
> s:=sum(Heaviside(t+tau-n*T)-Heaviside(t-tau-n*T),'n'=-infinity..infinity):  
> FOURIER(s,t,omega):  
> inttrans[fourier](s,t,omega):
```

Functia ts

Descriere

Aceasta functie este dedicata trunchierii serilor construite cu functia **sum()**.

Functia returneaza o subserie a seriei originale.

Argumente

Functia accepta exact doua argumente.

- Primul argument trebuie sa fie o expresie care contine sau nu functia **sum()**
- Al doilea argument trebuie sa fie de tipul *index = min_value .. max_value*, unde *index* este numele variabilei de indexare a functiei **sum()** din expresia *expr*, iar *min_value .. max_value* este un interval de numere intregi (marginit sau nemarginat), care reprezinta intervalul de trunchiere.

Utilizare

Aceasta functie se apeleaza ca o functie independenta:

ts():

Exemple

```
> restart:  
> libname:=".SCSlib",libname:  
> s:=sum(Heaviside(t+tau-is*T)-Heaviside(t-tau-is*T),'is'=-infinity..infinity):  
> ts(s,is=-5..5):
```

Functia cs

Descriere

Aceasta functie este dedicata conversiei unei expresii de o anumita forma intr-o serie.

Functia returneaza o serie a carei suma este expresia originala sau expresia originala.

Argumente

Functia accepta exact 1 argument.

Acest argument trebuie sa fie o expresie.

Utilizare

Aceasta functie se apeleaza ca o functie independenta:

cs():

Exemple

```
> restart:  
> libname:=".SCSlib",libname:  
> cs(sinh(3*cosh(5*t))):
```

Functia rpa

Descriere

Aceasta functie este dedicata reprezentarii grafice a unor semnale | spectre care contin in expresia lor distributii Dirac, dar nu numai.

Functia returneaza un grafic care contine:

- reprezentarea functiei din expresia semnalului | spectrului cu linie subtire
- reprezentarea impulsurilor Dirac din expresia semnalului | spectrului cu linie groasa

Argumente

Functia accepta minim 2 argumente si maxim 7 argumente.

Obligatorii

Primul argument al functiei trebuie sa fie o expresie in variabila t sau ω , care face diferențierea intre semnale si spectre.

Al doilea argument trebuie sa fie t sau ω .

Optionale:

Celelalte sase argumente in afara de primul sunt optionale. Cele sase argumente optionale pot fi de tipul:

- $interval = left .. right$,

unde $left .. right$ este un interval de numere reale.

Acest argument, daca este prezent, stabileste intervalul pe care se face reprezentarea.

Valoarea implicita pentru $left .. right$ este $-10 .. 10$.

- $numarpuncte = numar_puncte$,

unde $numar_puncte$ este numar intreg pozitiv.

Acest argument, daca este prezent, stabileste numarul de puncte pe care se face reprezentarea.

Valoarea implicita pentru $numar_puncte$ este 200 .

- $tipgrafic = tip_grafic$,

unde tip_grafic este unul din $\{ real, imaginare, modul, faza, D3 \}$.

Acest argument daca este prezent, stabileste ce caracteristica a semnalului | spectrului este reprezentata..

Valoarea implicita pentru tip_grafic este $D3$, caz in care reprezentarea este spatiala, pe cele 3 axe fiind variabila indenpendenta (t sau ω), partea reala si partea imaginara a semnalului sau spectrului.

- $discont = flag$,

unde $flag$ este unul din $\{ true, false \}$.

Acest argument daca este prezent, stabileste daca graficul prezinta sau nu intreruperi in punctele de discontinuitate ale semnalului | spectrului.

Valoarea implicita pentru $flag$ este $false$.

- $culoare = [red_level, green_level, blue_level]$,

unde $[red_level, green_level, blue_level]$ este compozitia cromatica in format **RGB** a culorii utilizate pentru reprezentare.

Valoarea implicita pentru $[red_level, green_level, blue_level]$ este $[0, 0, 0]$, caz in care culoarea utilizata pentru reprezentare este negru.

Utilizare

Aceasta functie se apeleaza ca o functie independenta:

rpa():

Exemple

```
> restart:  
> libname:="..../SCSlip",libname:  
> s:=sin(t)/t+I*(Dirac(t-1)+Dirac(t+1));  
> PLOT3D(rpa(s,t),AXESSTYLE(NORMAL));  
> PLOT(rpa(s,t,tipgrafic=imaginare,numarpuncte=100,discont=true,interval=-5.5,culoare=[1,0,0]),AXESSTYLE(NORMAL));
```